ラグランジュ乗数法では解が求まらない

Wednesday, April 5, 2017

例題

目的関数：$f(x,y)=(x+1)^2+y^2 \quad \to \min$

制約条件：$\varphi(x,y)=y^2-x^3=0$

ラグランジュ関数は$\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$であるから

$\Phi_x=\Phi_y=\Phi_\lambda=0$ を満たす$x=x_0, y=y_0, \lambda=\lambda_0$ となる(x_0,y_0) が解を与える。

この方法はラグランジュ未定係数法と呼ばれる。

そこで上の例でこの方法を試そう。

$\Phi_x=0$ より

$2(x+1)-3\lambda x^2=0$ 。

$\Phi_y=0$より

$2y+2y\lambda=0$ が得られる。

$2y+2y\lambda=0$から、$\lambda=-1$ これを$2(x+1)-3\lambda x^2=0$に代入すると

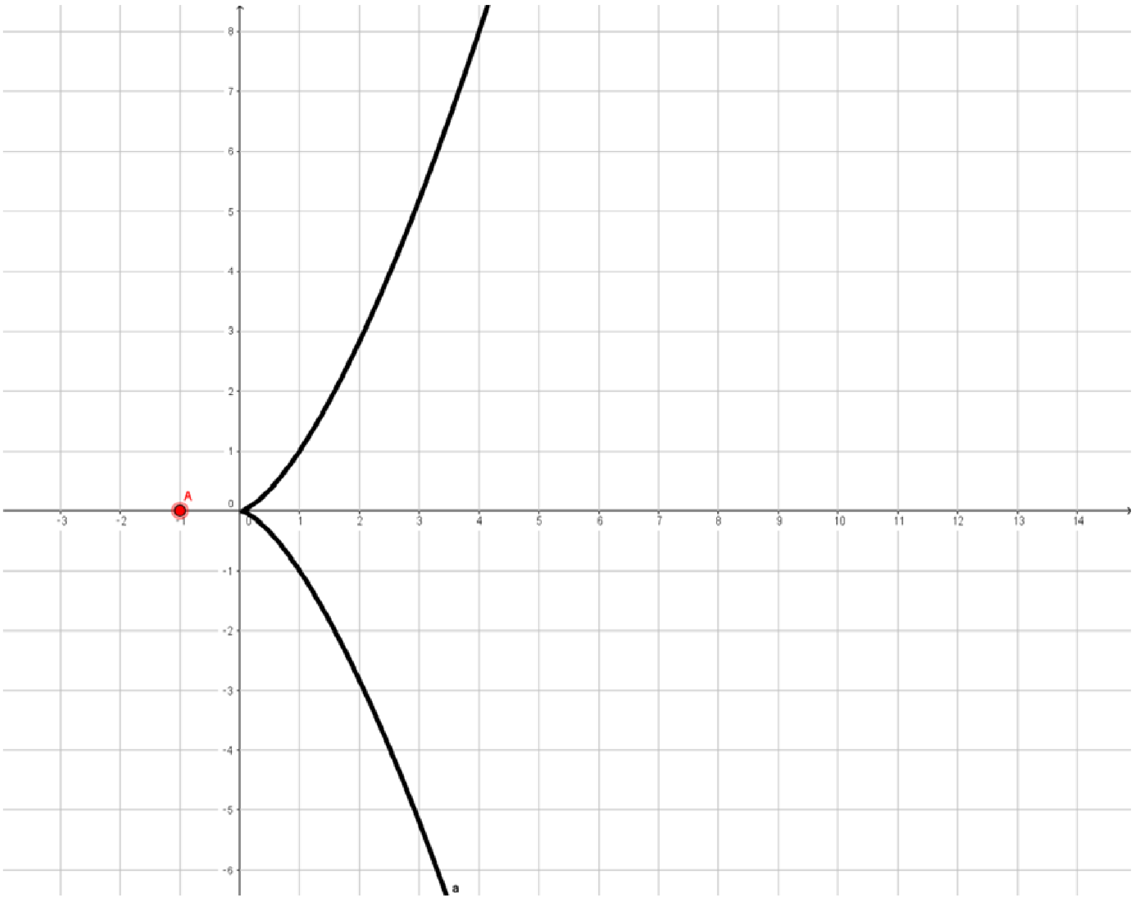
$2(x+1)+3x^2=0$。

しかしこの式は判別式を用いて実数解をもたないことがわかる。
ちょっと待った！。
$\lambda=-1$は$y\neq 0$ としてしまったからじゃないか。
つまり$y=0$ のときは解があるだろう。そこで、ラグランジュ関数において

$y=0$ として計算すると。$\Phi(x,y,\lambda)\big|_{y=0}=(x+1)^2+\lambda(-x^3)$。これで、

$\Phi_x=2(x+1)-3\lambda x^2$ ，$\Phi_\lambda=-x^3$ 。

そこで$\Phi_\lambda = 0$ より、$x = 0$。しかし、$x = 0$ を$\Phi_x = 2(x+1) - 3\lambda x^2$ に代入してみると$\Phi_x = 0$は成立していない。つまり、$\Phi_x = \Phi_y = \Phi_\lambda = 0$からは最適解が見つからない。最小値がないのではないか？制約条件$\varphi(x,y) = y^2 - x^3$ のグラフをかくと



そして、目的関数 $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ は赤丸で示した$(-1,0)$ と(x,y) の距離であることがわかるから、最小は$x = 0, y = 0$ のとき1 という値である。