微分形式雑記帳１

ベクトルの内積と外積

３次元ベクトルを $A=(a_1,a_2,a_3)$ ，$B=(b_1,b_2,b_3)$ とする。$A=(a_1,a_2,a_3)$ の長さを $|A|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ と定義する。$A\cdot B=|A||B|\cos\theta$ を A と B の内積とよぶ。ただし、θ はベクトル A と B がなす角度である。$e_1=(1,0,0)$ ，$e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ は互いに直交しているので $e_1\cdot e_2=0$ ，$e_1\cdot e_3=0$ であり、$|e_1|=|e_2|=|e_3|=1$ である。また、$A=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$ ，$B=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$ であるから、内積の分配法則から $(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)\cdot(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ を用いて $A=(a_1,a_2,a_3)$ ，$B=(b_1,b_2,b_3)$ の内積を $A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ と定義しても良い。行列式を要素とする３次元ベクトルを次の式で定義し

$$A\times B=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}e_1+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}e_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}e_3$$

を A と B の外積と呼ぶ。行列式の余因子展開：

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$$

を使うと、形式的だが

$$A\times B=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

と書くことができ

$$A\times A=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=0$$

がわかる。$C=(c_1,c_2,c_3)$ として、A と $B\times C$ の内積 $A\cdot(B\times C)$ を A,B,C のスカラー３重積と言う。$A=(a_1,a_2,a_3)$ と $B\times C=\left(\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\right)$ の内積を計算す

ると$A\cdot\left(B\times C\right)=a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$となる。同様な計算で、$A\cdot\left(A\times B\right)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0$, $B\cdot\left(A\times B\right)=\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0$となる。すなわち$A$と$B$の外積$A\times B$は$A$にも$B$にも直交している。いいかえれば$A\times B$は$A$と$B$で作る平面に直交するでありこれは法線ベクトルと呼ばれる。

外積は分配法則が成立する。たとえば、

$\left(A+2B\right)\times\left(A-B\right)=A\times A-A\times B+2B\times A-2B\times B=-3A\times B$ となる。

直接計算により$|A|^2|B|^2-\left(A\cdot B\right)^2=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)$

$=a_1^2\left(b_2^2+b_3^2\right)+a_2^2\left(b_1^2+b_3^2\right)+a_3^2\left(b_1^2+b_2^2\right)-2\left(a_1b_1a_2b_2\right)-2\left(a_2b_2a_3b_3\right)-2\left(a_1b_1a_3b_3\right)$

$=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2 \quad =|A\times B|^2$。他方$\left(A\cdot B\right)^2=|A|^2|B|^2\cos^2\theta$であるから、$|A\times B|^2=|A|^2|B|^2-\left(A\cdot B\right)^2=|A|^2|B|^2\sin^2\theta$つまり$|A\times B|$はベクトル$A$とベクトル$B$でつくる平行四辺形の（向き付けに依存して符号つきの）面積である。また、$|A|^2|B|^2-\left(A\cdot B\right)^2=|A\times B|^2\geq 0$より$|A|^2|B|^2\geq\left(A\cdot B\right)^2$というコーシーシュワルツの不等式がでる。次にベクトルAとBの平行条件は$A\times B=\left(0,0,0\right)$である。なぜならそのとき$0=|A\times B|^2=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2$となり$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$が導かれるので「$A$と$B$が平行$A /\!/ B \Leftrightarrow A\times B=0$」である。

空間曲線

$\vec{r}=(x,y,z)$ は３次元空間$\mathbb{R}^3$ の中の点である。時刻tにおける位置P が t の変化とともに連続的に動くときその軌跡は $\mathbb{R}^3$ の中で曲線を描く。すなわち、Pの軌跡は$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),a\le t\le b$ で表される。

$\vec{r}\,'=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=(x'(t),y'(t),z'(t))$ は曲線$\vec{r}=\vec{r}(t)$ の時刻t における接線ベクトルと呼ばれる。$\vec{r}=\vec{r}(t)$が$a\le t\le b$を動くとき軌跡が描く曲線の長さs は

$s=\displaystyle\int_a^b |r'(t)|dt=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y(t)'^2+z(t)'^2}dt$ である。

曲面

３次元空間$\mathbb{R}^3$ において、位置ベクトル$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$が２変数$u,v$ の連続な変化に伴ってなめらかに動くとき１つの曲面を動く。v を固定して、u だけ動かすとu 曲線が、 uを固定してvだけ動かすとv曲線が、２つの変数u,vを同時に動かすとu 曲線とv曲線が作る網目状の曲面が描かれる。偏微分$\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}$ はu 曲線の接線ベクトル、$\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}$は$v$曲線の接線ベクトルと呼ばれる。いま、$\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}\ne 0$を仮定すると、$u$ 曲線とv曲線は平行でなく網目が正しく作られる。$(u,v)=(u_0,v_0)$ において接線ベクトル$\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}$と接線ベクトル$\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}$でつくる平面（２つのベクトルは平行でないので正しく平面ができる）を$(u,v)=(u_0,v_0)$における**接平面**とよぶ。このときベクトル$\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}$はこの平面に直交するベクトルで、長さを１にするため$\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|$で割り算をして、$\vec{n}=\dfrac{1}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|}\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)$ が接平面の単位法線ベクトルとなる。

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=(x_u,y_u,z_u)\times(x_v,y_v,z_v)=\left(\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_u & x_u\\ z_v & x_v\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix}e_1+\begin{vmatrix}z_u & x_u\\ z_v & x_v\end{vmatrix}e_2+\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}e_3$$

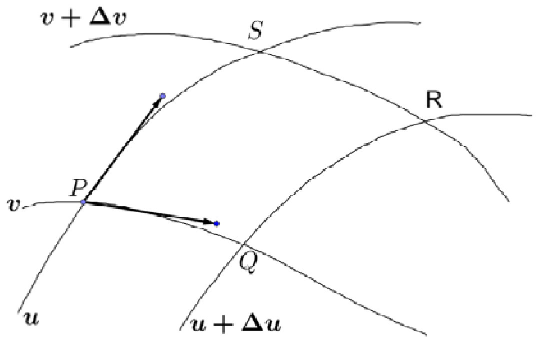
であるが、$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$などと書いて、

$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v) = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} e_1 + \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} e_2 + \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} e_3$とも表される。

曲面の面積

点(u,v) が平面上の領域D を動くとき、$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$

が描く曲面の面積S は$S = \iint_D \left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv$ で計算される。



Δu ，Δv を微小にとれば

$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}(u + \Delta u, v) - \vec{r}(u,v) \approx \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Delta u$

$\overrightarrow{PS} = \vec{r}(u, v + \Delta v) - \vec{r}(u,v) \approx \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Delta v$

ベクトル$\overrightarrow{PQ}$とベクトル$\overrightarrow{PS}$でつくる平行四辺形の面積ΔS は$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}$の大きさで

$\left| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} \right| \approx \left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$となる。したがってリーマン積分の定義に従って、

$\sum \Delta S$ を評価することにより、$S = \iint_D \left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv$とできる。つまり、

$dS = \left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv$ということである。ベクトルのまま書いて、$d\vec{S} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v dudv$

とも表される。

曲面は点(x,y) が平面上の領域D を動くとき(x,y)の関数として$\mathbb{R}^3$ のなかで

$z = z(x,y)$ の軌跡は２次元の曲面となる場合は、特に$x = u$ ，$y = v$ とおいてやると　$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \big(x, y, z(x,y)\big)$となるので$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$,

$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ と表される。このとき、

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) \text{で} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right), \quad S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

が得られる。

微分形式

$\mathbb{R}^3$ 上の微分１－形式を $Pdx + Qdy + Rdz$ と定義する。ここで、P, Q, R は $\mathbb{R}^3$ 上の関数である。
微分０－形式は微分可能な関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ のこととする。
向き付けられた曲線上の１－形式の線積分を

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \left(P\big(x(t), y(t), z(t)\big) \frac{dx}{dt} + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big) \frac{dy}{dt} + R\big(x(t), y(t), z(t)\big) \frac{dz}{dt} \right) dt$$

で計算される、計算結果は曲線の形にだけ依存してパラメータ表示の方法に依存しない。

この microscopic version はベクトル $\langle a, b, c \rangle$ を点 (x_0, y_0, z_0) で １－形式が食べる、つまり

$$(Pdx + Qdy + Rdz)(\langle a, b, c \rangle) = P(x_0, y_0, z_0)a + Q(x_0, y_0, z_0)b + R(x_0, y_0, z_0)c$$

と定義される。

グラディエント　$\nabla f = \left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$ は微分形式で

$df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz$ と置き換えられる。

たとえば、$d\left(x^2 + y^2\right) = 2xdx + 2ydy$ となる。

$a = df$ は exact な１－形式は保存系のベクトル場にあたる。
$a = df$ のとき、f は a のスカラポテンシャル と呼ばれる。

２－形式：
例　　$dx \wedge dy$

$\int_S dx \wedge dy =$ ベクトル場上向き flux（xy 平面から z 軸方向への流量）=xy 座標への曲面 S が落とす影の面積
平面座標の向き付けに応じて $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ が要請される。
一般の２－形式：$Pdx \wedge dy + Qdy \wedge dz + Rdz \wedge dx$
$\int_S Pdx \wedge dy + Qdy \wedge dz + Rdz \wedge dx$ はベクトル場での flux をあらわす。

２－形式の積分 $\int_S fdx \wedge dy$ の計算
（１）$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$
（２）α, β を $p-$ 微分形式とするとき計算規則は

$\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$

$\alpha \wedge (f\beta) = f\alpha \wedge \beta$ ただし、f は関数（すなわち、０－形式）

2－形式　引き戻し：＊という記号をつける。$\Phi^* f = f \circ \Phi$ 合成関数
$\Phi : D \to S$ 、$D \subset \mathbb{R}^2$ 、$S \subset \mathbb{R}^3$ とするとき、flux 積分は
$\int_S fdx \wedge dy = \int_D \Phi^* (fdx \wedge dy)$ と計算される。そして、引き戻し演算は

$\Phi^* (fdx \wedge dy) = (\Phi^* f) \Phi^* (dx) \wedge \Phi^* (dy) = (\Phi^* f) d(\Phi^* x) \wedge d(\Phi^* y)$

のように分配されていく。具体的には

$(\Phi^* f) = f \circ \Phi, d(\Phi^* x) = d(x \circ \Phi)$ のように合成関数などとなり、結局

$\Phi^* (fdx \wedge dy) = f \circ \Phi d(x \circ \Phi) \wedge d(y \circ \Phi)$

となる。つまり、$\Phi^* (fdx \wedge dy) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) d(x(u,v)) \wedge d(y(u,v))$ となる。

例）x, y, z 座標の上の関数などの表現をu, v 座標の上の関数表現に置き換える。

他方一般に$dg=\dfrac{\partial g}{\partial u}du+\dfrac{\partial g}{\partial v}dv$ の関係から、

$dx=\dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv, dy=\dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv$でこれらの$\wedge$ をとると、

$\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv\right)\wedge\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv\right)=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)du\wedge dv$を得るので、

$\displaystyle\int_S fdx\wedge dy=\int_D \Phi^*\left(fdx\wedge dy\right)=\int_D f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\wedge dv$が得られる。同じ方法で、

$$\iint_S Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iint_D\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)du\wedge dv$$

$\hat{i}=e_1$ ， $\hat{j}=e_2$ ， $\hat{k}=e_3$という記号が用いられる。不思議なことに$\hat{i}$ ， $\hat{j}$ ， $\hat{k}$は４元数のi, j, k と似た性質がある。

$\displaystyle\int_S\left(P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}\right)\cdot d\vec{S}=\int_D\left(P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}\right)\cdot\left(\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right)du\wedge dv$ とも表される。

ただし、$\displaystyle\int_D fdu\wedge dv=\iint_D fdudv$ のときは$\displaystyle\int_D fdv\wedge du=-\iint_D fdudv$のように向き付けに依存して符号が付けられる。Fubini の定理から$\displaystyle\iint_D fdvdu=\iint_D fdudv$であるから、$\displaystyle\iint_D fdu\wedge dv$と$\displaystyle\iint_D fdv\wedge du$は符号が逆である。しかし、どちらを正、どちらを負にとるかは、u, v のとりかたの順序に依存している。

３－形式

$dx\wedge dy\wedge dz$ の形のものである。$(dx\wedge dy)\wedge dz=dx\wedge(dy\wedge dz)$をみたすので括弧をつける必要がない。しかし、$dy\wedge dx\wedge dz=-dx\wedge dy\wedge dz$のように一か所の入れ替えでは符号が変わる。積分については、$\displaystyle\int_E fdx\wedge dy\wedge dz=\iiint_E fdxdydz$ と定める。

したがって$\displaystyle\int_E fdy\wedge dx\wedge dz=-\iiint_E fdxdydz$などとなる。

１－形式$\alpha=Pdx+Qdy+Rdz$についても引き戻しで曲線上の積分を解釈しなおすことができる。曲線はパラメータをt とおき$a\le t\le b$ の範囲を動く

$\vec{r}(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ とする。そして、$I=[a,b]$ とおいて、

$$\int_C \alpha=\int_C Pdx+Qdy+Rdz=\int_I r^*\left(Pdx+Qdy+Rdz\right)=\int_I r^*Pd\left(r^*x\right)+r^*Qd\left(r^*y\right)+r^*Rd\left(r^*z\right)$$

$$\int_C \alpha=\int_C Pdx+Qdy+Rdz=\int_I r^*\left(Pdx+Qdy+Rdz\right)=\int_I r^*Pd\left(r^*x\right)+r^*Qd\left(r^*y\right)+r^*Rd\left(r^*z\right)$$

まとめると、

$\Phi^*df=d\Phi^*f$

$\Phi^*\left(\alpha\wedge\beta\right)=\Phi^*\left(\alpha\right)\wedge\Phi^*\left(\beta\right)$

$\alpha\wedge\beta=\left(-1\right)^{|\alpha||\beta|}\beta\wedge\alpha$ （α が k 形式のとき、$|\alpha|=k$ とおいた）

４－形式$\alpha=0$ （例：$dx\wedge dy\wedge dx\wedge dz$ われわれは$dx,\mathrm{d}y,dz$ の３つしか持っていないから）

$d\left(p-\text{形式}\right)=(p+1)-\text{形式}$

$d\left(dx\right)=0$ $d\left(fdx\right)=df\wedge dx$ $d\left(fdx+gdy\right)=df\wedge dx+dg\wedge dy$

じつは、もっと一般に $d^2=0$ がいえる。