微分形式雑記帳２

0 形式：微分可能な関数 C^1 とか C^∞ の関数 f , P,Q,R

1 形式： $\tilde{\mathbf{F}} = Pdx + Qdy + Rdz$

２形式 ： $\mathbf{F}^* = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$,

3 形式 ： $fdx \wedge dy \wedge dz$

p form $\sum f_{i_1 i_2 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$

$\mathbb{R}^n$ では n 形式まで考えられるが、$\mathbb{R}^3$ では $p \geq 4$ となる p 形式は０しかない。

wedge $\wedge$ の計算ルール

（１） $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

（２） α, β を $p-$形式とするとき計算規則は

$$\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$$

（３） $\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha$ （α が k 形式のとき、$|\alpha| = k$ とおいた）

注意事項）

f が０形式のときは $f \wedge \alpha = f\alpha$ 、$\beta \wedge f = f\beta$ と $\wedge$ を省略することができる。

つまり（３）より、$\beta \wedge f = (-1)^{|\beta| \cdot 0} f \wedge \beta = f\beta$ であるからこの書き方は矛盾しない。さらに、$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge f \wedge \cdots \wedge \alpha_k = f \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = f\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ と自由に先頭に持っていける、さらに０形式 f はどこにおいてもよい。

外微分 d の計算ルール

線形性：r,s が実数のとき $d(r\alpha + s\beta) = rd\alpha + sd\beta$

０形式 f について、$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

$d^2 = 0$

α が p 形式の時、$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$

しばらく $\mathbb{R}^3$ で考える。

$\mathbf{F}=(P,Q,R)$ は $\mathbf{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ とも書く。この時〜、＊を用いて、$\mathbf{F}=(P,Q,R)$ と

１形式　$\tilde{\mathbf{F}}=Pdx+Qdy+Rdz$ と
２形式　$\mathbf{F}^*=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$
を関連づける。
このとき、次が成り立つ。

0 形式 f について

(1) $df=\widetilde{grad\ f}$ 、

$\mathbf{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ について

(2) $d\tilde{\mathbf{F}}=(curl\,\mathbf{F})^*$

(3) $d\mathbf{F}^*=(div\mathbf{F})dV$

ただし、$dV=dx\wedge dy\wedge dz$

このように、ベクトル解析で現れる、grad,curl,div が外微分で表現される。

ちなみに、$grad\ \ f=f_x\hat{i}+f_y\hat{j}+f_z\hat{k}$ 、$\mathbf{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ に対して

$curl\ \mathbf{F}=(R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y)$ 、$div\ \mathbf{F}=P_x+Q_y+R_z$ である。

(1)の証明：$df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}=\widetilde{grad\ f}$ は定義より示される。
(2)の証明: $\tilde{\mathbf{F}}=Pdx+Qdy+Rdz$ に対して、$d\tilde{\mathbf{F}}=dP\wedge dx+dQ\wedge dy+dR\wedge dz$
ところが、

$$dP\wedge dx=(P_xdx+P_ydy+P_zdz)\wedge dx=P_ydy\wedge dx+P_zdz\wedge dx$$

$$dQ\wedge dy=(Q_xdx+Q_ydy+Q_zdz)\wedge dy=Q_xdx\wedge dy+Q_zdz\wedge dx$$

$$dR\wedge dz=(R_xdx+R_ydy+R_zdz)\wedge dz=R_xdx\wedge dz+R_ydy\wedge dz$$

$dx\wedge dy=-dy\wedge dx$ などに注意してこれらを加えると、

$d\tilde{\mathbf{F}}=(R_y-Q_z)dy\wedge dz+(P_z-R_x)dz\wedge dx+(Q_x-P_y)dx\wedge dy=(curl\,\mathbf{F})^*$ となる。

(3)の証明：$\mathbf{F}^* = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$ に対して

$d\mathbf{F}^* = dP\wedge dy\wedge dz + dQ\wedge dz\wedge dx + dR\wedge dx\wedge dy$

ところが、$dP\wedge dy\wedge dz = \left(P_x dx + P_y dy + P_z dz\right)\wedge dy\wedge dz = P_x dx\wedge dy\wedge dz = P_x dV$

同様に、$dQ\wedge dz\wedge dx = \left(Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz\right)\wedge dz\wedge dx = Q_y dy\wedge dz\wedge dx = Q_y dV$

$dR\wedge dx\wedge dy = \left(R_x dx + R_y dy + R_z dz\right)\wedge dx\wedge dy = R_z dz\wedge dx\wedge dy = R_z dV$

となるので、これらを加えることにより、$d\mathbf{F}^* = \left(P_x + Q_y + R_z\right)dx\wedge dy\wedge dz$ ■

また、次が成り立つ。

> (1) $\tilde{\mathbf{F}}\wedge\tilde{\mathbf{G}} = \left(\mathbf{F}\times\mathbf{G}\right)^*$
>
> (2) $\tilde{\mathbf{F}}\wedge\mathbf{G}^* = \left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\right)dV$
>
> (2)* $\tilde{\mathbf{F}}\wedge\mathbf{G}^* = \tilde{\mathbf{G}}\wedge\mathbf{F}^* = \mathbf{G}^*\wedge\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^*\wedge\tilde{\mathbf{G}}$ （(2)からの帰結）

(1)の証明：$\tilde{\mathbf{F}} = Pdx + Qdy + Rdz$,$\tilde{\mathbf{G}} = Adx + Bdy + Cdz$ とする。ウェッジ積の分配法則より

$\left(Pdx + Qdy + Rdz\right)\wedge\left(Adx + Bdy + Cdz\right) = PAdx\wedge dx + PBdx\wedge dy + PCdx\wedge dz + QAdy\wedge dx + \cdots$

と計算していけばよいが、$dx\wedge dx = 0$ ，$dx\wedge dy = -dy\wedge dx$ などを使うと、

$\left(Pdx + Qdy + Rdz\right)\wedge\left(Adx + Bdy + Cdz\right) = \left(QC - RB\right)dy\wedge dz + \left(RA - PC\right)dz\wedge dx + \left(PB - QA\right)dx\wedge dy$

となるが、これは、$\mathbf{F} = \left(P, Q, R\right)$ と $\mathbf{G} = \left(A, B, C\right)$ の外積

$\mathbf{F}\times\mathbf{G} = \left(QC - RB, RA - PC, PB - QA\right)$ に等しい。外積の計算忘れた人のため

$\mathbf{F}\times\mathbf{G} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ A & B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q & R \\ B & C \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} P & R \\ A & C \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} P & Q \\ A & B \end{vmatrix}\hat{k}$ であった。よって $\tilde{\mathbf{F}}\wedge\tilde{\mathbf{G}} = \left(\mathbf{F}\times\mathbf{G}\right)^*$ ■

(2) の証明：$\tilde{\mathbf{F}} = Pdx + Qdy + Rdz$,$\mathbf{G}^* = Ady\wedge dz + Bdz\wedge dx + Cdx\wedge dy$

より、$\tilde{\mathbf{F}}\wedge\mathbf{G}^* = \left(Pdx + Qdy + Rdz\right)\wedge\left(Ady\wedge dz + Bdz\wedge dx + Cdx\wedge dy\right)$ に分配法則を使うと、0形式はウェッジの計算で好きなところに持っていけるので

$Pdx\wedge Ady\wedge dz = PAdx\wedge dy\wedge dz$ 、$Qdy\wedge Bdz\wedge dx = QBdy\wedge dz\wedge dx$ 。しかし、この場合 $dy\wedge dz\wedge dx = dx\wedge dy\wedge dz$ となるのは $dx\wedge dy = -dy\wedge dx$ といれかわるごとに符

号が変わるがそれを偶数回の入れ替えするので結果的に符号は変わらない。
$dx\wedge dz\wedge dx$ などおなじものが出てくるときは０となり消えてしまう。結局、

$\mathbf{F}=(P,Q,R)$ と $\mathbf{G}=(A,B,C)$ の内積 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}=(PA+QB+RC)$ 、$dV=dx\wedge dy\wedge dz$ を

考慮すれば、

$\tilde{\mathbf{F}}\wedge\mathbf{G}^{*}=(Pdx+Qdy+Rdz)\wedge(Ady\wedge dz+Bdz\wedge dx+Cdx\wedge dy)$

$=(PA+QB+RC)dx\wedge dy\wedge dz=(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})dV$ となる。 ■

ベクトル解析の本にはおびただしい数の公式集が載っていて
たとえばつぎのものがある。微分形式を用いた証明ができることを示そう。

(1) $div(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=curl\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}-\mathbf{F}\cdot curl\mathbf{G}$

(2) $curl(f\mathbf{F})=\nabla f\times\mathbf{F}+f\ curl\,\mathbf{F}$

(1)の証明：上で示した $d\mathbf{F}^{*}=(div\mathbf{F})dV$, $\tilde{\mathbf{F}}\wedge\tilde{\mathbf{G}}=(\mathbf{F}\times\mathbf{G})^{*}$, $d\tilde{\mathbf{F}}=(curl\,\mathbf{F})^{*}$

$div(\mathbf{F}\times\mathbf{G})dV=d\left((\mathbf{F}\times\mathbf{G})^{*}\right)=d\left(\tilde{\mathbf{F}}\wedge\tilde{\mathbf{G}}\right)$

$d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^{p}\alpha\wedge d\beta$ において $\tilde{\mathbf{F}}=Pdx+Qdy+Rdz$ は１形式であるので、

$d\left(\tilde{\mathbf{F}}\wedge\tilde{\mathbf{G}}\right)=d\tilde{\mathbf{F}}\wedge\tilde{\mathbf{G}}-\tilde{\mathbf{F}}\wedge d\tilde{\mathbf{G}}=(curl\mathbf{F})^{*}\wedge\tilde{\mathbf{G}}-\tilde{\mathbf{F}}\wedge(curl\mathbf{G})^{*}=(curl\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}dV-curl\mathbf{G}\cdot\mathbf{F})dV$

最後の等式は $\tilde{\mathbf{F}}\wedge\mathbf{G}^{*}=(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})dV$ を使った。そして、得られた結果

$div(\mathbf{F}\times\mathbf{G})dV=(curl\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}dV-curl\mathbf{G}\cdot\mathbf{F})dV$ から求めたいものが得られる。

(2)の証明 $(curl(f\mathbf{F}))^{*}=(\nabla f\times\mathbf{F})^{*}+(f\ curl\,\mathbf{F})^{*}$ を示せばよい。この式は

$d\tilde{\mathbf{F}}=(curl\,\mathbf{F})^{*}$, $\tilde{\mathbf{F}}\wedge\tilde{\mathbf{G}}=(\mathbf{F}\times\mathbf{G})^{*}$ より、$d\left(f\tilde{\mathbf{F}}\right)=\widetilde{\nabla f}\wedge\tilde{F}+fd\tilde{F}$ と書き換えられる。

左辺は $df=\widetilde{grad\ f}$ を用いて $d\left(f\tilde{F}\right)=df\wedge\tilde{F}+fd\tilde{F}=\widetilde{gradf}\wedge\tilde{F}+fd\tilde{F}$

証明おわり。■