微分形式雑記帳３　　$\mathbb{R}^3$ における微分形式

$1, dx, dy, dz$ で生成される。

０形式　滑らかな関数　f

１形式　$\alpha = adx + bdy + cdz = \omega(\langle a,b,c\rangle)$ ，$\vec{A} = \langle a,b,c\rangle$ と書いて $\omega(\vec{A})$ と略記

２形式　$\beta = ady\wedge dz + bdz\wedge dx + cdx\wedge dy = \Phi(\langle a,b,c\rangle)$ ，$\Phi(\vec{A})$ と略記

雑記帳２でやったことは命題１、命題２の形に書ける。

命題１．

（１）$\omega(\vec{A})\wedge\omega(\vec{B}) = \Phi(\vec{A}\times\vec{B})$

（２）$\omega(\vec{A})\wedge\omega(\vec{B})\wedge\omega(\vec{C}) = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})dx\wedge dy\wedge dz$

（３）$\omega(\vec{A})\wedge\Phi(\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{B})dx\wedge dy\wedge dz$

命題２．外微分を d とするとき、

（１）f　関数 $\Rightarrow$　$df = \omega(\nabla f)$ ，$\nabla f = grad\ \ f$

（２）$\alpha = \omega(\vec{F})$ $\Rightarrow d\alpha = \Phi(\nabla\times\vec{F})$ ，$\nabla\times\vec{F} = rot\ \vec{F}$　あるいは $cur\ \vec{F}$

（３）$\beta = \Phi(\vec{G})$ $\Rightarrow d\beta = (\nabla\cdot\vec{G})dx\wedge dy\wedge dz$ ，$\nabla\cdot\vec{G} = div\ \vec{G}$

いま天下り的に $d^2 = 0$ と置いてみるとベクトル解析の公式のいくつかが出てくる。

（１）$d(df) = 0$ $\Rightarrow \nabla\times\nabla f = 0$　$rot\, grad\ \ f = 0$ のこと

なぜなら $df = \omega(\nabla f)$ より、$d(df) = d\omega(\nabla f) = \Phi(\nabla\times\nabla f)$（命題２（１）（２）を用いた。∎

（２） $d(d\alpha)=0 \ \Rightarrow \nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0$ ， $div\ rot\ \vec{F}=0$ のこと

なぜなら $d(d\alpha)=d\left(d\omega(\vec{F})\right)=d\left(\Phi(\nabla\times\vec{F})\right)=(\nabla\cdot\nabla\times\vec{F})dx\wedge dy\wedge dz$ ■

（３） $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

なぜなら、命題２（３）より、

（＊） $d(\Phi(A\times B))=\nabla\cdot(A\times B)dx\wedge dy\wedge dz$

他方、$d\left(\omega(\vec{A})\wedge\omega(\vec{B})\right)=d\omega(\vec{A})\wedge\omega(\vec{B})-\omega(\vec{A})\wedge d\omega(\vec{B})$

（α が p 形式の時、$d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta$ の性質を使った）

命題２（２）より $d\omega(\vec{A})=\Phi(\nabla\times\vec{A})$ などを使うと

$$d\left(\omega(\vec{A})\wedge\omega(\vec{B})\right)=\Phi(\nabla\times\vec{A})\wedge\omega(\vec{B})-\omega(\vec{A})\wedge\Phi(\nabla\times\vec{B})$$

そして、命題１（３）よりこの式は、

（＊＊） $d\left(\omega(\vec{A})\wedge\omega(\vec{B})\right)=\left((\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\right)dx\wedge dy\wedge dz$

となる。命題１（１）より（＊）と（＊＊）の左辺は等しいことを考えれば証明が終わる。■

例題） $\mathbb{R}^2$ において、dx, dy が生成元
極座標変換 $x=r\cos\theta$ ，$y=r\sin\theta$ で外微分を行うと
$dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta$ ， $dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta$

そこで、$dx\wedge dy=(\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta)\wedge(\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta)$

$$=r\cos^2\theta dr\wedge d\theta-r\sin^2\theta d\theta\wedge dr=rdr\wedge d\theta$$

これは、$\iint_D fdxdy=\iint_{D'} frdrd\theta$ の計算でヤコビアンが r すなわち、$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=r$

を自然な形で導出している。