微分形式雑記帳４

接ベクトル

> $\mathbb{R}^n$ の点 p を始点とする有向線分を点 p における $\mathbb{R}^n$ の接ベクトルという。点 p における $\mathbb{R}^n$ の接ベクトル全体を $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ で表し、$\mathbb{R}^n$ の接空間（tangent space） という。
>
> 平行移動で $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)\cong T_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ という同型が得られるが、$T_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ は自然に $\mathbb{R}^n$ に同一視できる。$T_p\left(\mathbb{R}^n\right)\cong T_0\left(\mathbb{R}^n\right)\cong \mathbb{R}^n$。ということで、$T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ の一次結合で書ける。$\mathbb{R}^n$ の接ベクトル全体を $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ の集合 $T\left(\mathbb{R}^n\right)=\bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ は、$\mathbb{R}^n$ の接バンドル（tangent bundle）という。上の同一視より、$T\left(\mathbb{R}^n\right)\cong \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ である。

$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}=\left\{\left(p^1,p^2,\cdots,p^n\right)\middle| p^i\in\mathbb{R}\right\}$ は $\left(p+q\right)^i=p^i+q^i$,$\left(cp^i\right)=cp^i$ と言う意味でベクトル空間である。標準基底は

$$\left(e_i\right)^j=\delta_{i,j}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$ だと、$e_1=\left(1,0,0\right)$, $e_2=\left(0,1,0\right)$, $e_3=\left(0,0,1\right)$ が標準基底で、任意の

$p=\left(p^1,p^2,p^3\right)\in\mathbb{R}^3$ は $p=p^1\left(1,0,0\right)+p^2\left(0,1,0\right)+p^3\left(0,0,1\right)$ と書ける。

q を始点とするベクトル $v\in\mathbb{R}^n$ に対して、$\left(q,v\right)\in T_q\mathbb{R}^n$ である。

$T_p\mathbb{R}^n=\left\{\left(p,v\right)\middle| v\in\mathbb{R}^n\right\}=\left\{p\right\}\times\mathbb{R}^n$ とおけるから、$T_p\mathbb{R}^n=\bigcup_{p\in\mathbb{R}^n}\left\{p\right\}\times T_p\mathbb{R}^n$ は接バンドルで、$\left(p,v\right)$ の p は attachment ポイントで、v はベクトル部分。そして演算、内積、ノルムは、,$c\left(p,v\right)=\left(p,\mathrm{c}v\right)$, $\left(p,v\right)\cdot\left(p,w\right)=\left(p,v\cdot w\right)$, $v\cdot w=v^Tw$,

$\left\|\left(p,v\right)\right\|=\left\|v\right\|=\sqrt{v\cdot v}$ で定義される。$\left(p,v\right)$ と $\left(p,w\right)$ が直交しているとは、$v\cdot w=0$ のことである。そして、部分集合 $S\subset T_p\mathbb{R}^n$ に対して

$S^{\perp}=\{(p,v)|(p,v)\cdot(p,s),s\in S\}$ とく。S が部分空間の場合は$T_p\mathbb{R}^n=S\oplus S^{\perp}$である。$X:S\to T\mathbb{R}^n$ とする。$p\in S$ に対し$\mathbb{X}(p)\in\{p\}\times\mathbb{R}^n=T_p\mathbb{R}^n$ 。$\mathbb{X}$ はベクトル場と言われる。任意の$(p,v)\in T_p\mathbb{R}^n$ に対して$\pi((p,v))=p$ を考えると$p\in S$

$\pi(\mathbb{X}(p))=p$であるから、$\pi\circ\mathbb{X}=id_S$ であり、$\mathbb{X}$ は$TS\subset T\mathbb{R}^n$ の section と呼ばれる。

Tangent spaces と cotangent spaces

(定義)座標関数　$x^i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x^i(p)=p^i$, $i=1,2,\cdots n$

$\mathbb{R}^3$ のとき、$x(p)=p^1$, $y(p)=p^2$, $z(p)=p^3$

例） $f=x^2+yz$ のとき、$f(a,b,c)=a^2+bc$

例） $f=\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2$ のとき、$f(p)=\|p\|$

(定義)方向微分(the directed derivation)

$f:dom(f)\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が滑らかであり、$p\in dom(f)$ とする。

$(p,v)\in T_p\mathbb{R}^n$ に関して、p におけるf の方向微分

$(Df)(v)(p)=Df(p,v)=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(p+tv)-f(p)}{t}$と定義するが、$\alpha(t)=p+tv$ とおけば、

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(p+tv)-f(p)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\alpha(t))-f(\alpha(0))}{t}=(f\circ\alpha)'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(\alpha(0))\frac{dx^i(\alpha(t))}{dt}$$

$x^i(\alpha(t))=p^i+tv^i$ であるから、$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(\alpha(0))\dfrac{dx^i(\alpha(t))}{dt}=\sum_{i=1}^{n}v^i\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(p)=v\cdot(\nabla f)(p)$

となる。つまり、p における f の v 方向微分は、$v\cdot\nabla f(p)$ と定義すればよいことがわかる。$(Df)(p,v)=\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)(f)$ と書いてみれば、

$T_p\mathbb{R}^n=\left\{\sum_{j=1}^{n}v^j\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \middle| (v^1,\cdots,v^n)\in\mathbb{R}^n\right\}$ と定義できる。

結局　$(p,v)=v_p$ と書いて$(Df)(p,v)=v_p(f)$ から

$v_p=v^1\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p+v^2\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p+\cdots+v^n\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p=\mathbb{X}$ とすると、この $\mathbb{X}$ は

（１）$\mathbb{X}\in T_p\mathbb{R}^n$

（２）$\mathbb{X}(fg)=\mathbb{X}(f)g(p)+f(p)\mathbb{X}(g)$

（３）$\mathbb{X}(f+g)=\mathbb{X}(f)+\mathbb{X}(g)$

（４）$\mathbb{X}(cf)=c\mathbb{X}(f)$

が成立する

$(Df)(p,v)=\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)(f)$ の式で、特に $v^j=1$ $v^i=0, i\neq j$ とすると、$(p,v)=v_p=\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ なので、$(Df)(p,v)=\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)(f)$ は

$(Df)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)=\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p(f)$ となる。そして $f=x^i$ ととると、$(Dx^i)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)=\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p(x^i)$

これは明らかに$(Dx^i)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)=\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p(x^i)=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p)=\delta_{i,j}$ クロネッカーのデルタとなる。$Dx^i:T_p\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ と言う対応は Dx^i は線形汎関数つまり、$V^*=L(V,\mathbb{R})$ と

言うダイアグラムつまりベクトル空間Vから実数への線形写像$L(V,\mathbb{R})$はVの双対空間でV^*と表す習わしであった。 つまり、$Dx^i \in \left(T_p\mathbb{R}^n\right)^*$ と書ける。

D をd_p と書き直して

定義）$i=1,\cdots,n$ に対して　$d_px^i\left(v_p\right)=v_p\left[x^i\right]$,$v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ という線形汎関数とする。

定義）$d_pf\left(v_p\right)=v_p\left[f\right]$は$f$ のp における方向微分

$$d_pf\left(v_p\right)=v_p\left[f\right]=v_p=v^1\left.\frac{\partial f}{\partial x^1}\right|_p+v^2\left.\frac{\partial f}{\partial x^2}\right|_p+\cdots+v^n\left.\frac{\partial f}{\partial x^n}\right|_p$$

と定義すると、$d_pf \in \left(T_p\mathbb{R}^n\right)^*$である。

$T_p\mathbb{R}^n=\left\{\sum_{j=1}^n v^j\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \middle| \left(v^1,\cdots,v^n\right)\in\mathbb{R}^n\right\}$の標準的な基底として$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right\}$ とすると、$\left(T_p\mathbb{R}^n\right)^*$の基底として$\left\{d_px^1,\cdots,d_px^n\right\}$ がとれる。これは$\left(d_px^i\right)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)=\delta_{i,j}$の性質から双対基底と呼ばれる。このことは線形代数で知られた事実である。

定義）$\left(T_p\mathbb{R}^n\right)^*=L\left(T_p\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$は cotangent space とよばれる。

$\left(T\mathbb{R}^n\right)^*=T^*\mathbb{R}^n=\bigcup_{p\in\mathbb{R}^n}\{p\}\times\left(T_p\mathbb{R}^n\right)^*$は cotangent bundle とよばれる。

そしてその要素は微分 1 形式$\alpha=\alpha_1dx_1+\cdots+\alpha_ndx_n$ であり、点p において$\alpha(p)=\alpha_1(p)d_px_1+\cdots+\alpha_n(p)d_px_n$で表あされる。

練習問題）$\mathbb{X}=f^1\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p+f^2\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p+\cdots+f^n\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$のとき、

$\alpha(\mathbb{X})=\alpha_1 f^1+\cdots+\alpha_n f^n$ となることを示せ。（$\left(d_p x^i\right)\left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)=\delta_{i,j}$ よりあきらかだと思う）

接ベクトル $X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i e_i \in T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ とする。$\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 関数 f の点 p における X 方向への微分は $X\cdot\nabla f(p)=\left(\xi^1,\cdots,\xi^n\right)\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p),\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p$ であるので、 $X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i e_i \cong \sum_{i=1}^{n}\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ という同一視を行う。この同一視の特別な場合として $e_i\cong\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ となる。$e_1,e_2,\cdots,e_n$ は $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ の基底であるから、同一視から、

命題）$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ は $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ の基底である。

接空間 $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ の双対空間を $T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$ と書けば、$T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$ は $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ から $\mathbb{R}$ への線形写像の全体である。$f\in C^\infty$ の全微分 df と $X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i e_i=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ に対して $(df)_p(X)=X\,f$ と定義すれば、$(df)_p\in T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$ である。特に $f=x_i$,$X=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ に対して、$(dx_i)_p\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}x_i=\delta_{ij}$ となるので、

命題）$\{dx_1,\cdots,dx_n\}$ は $T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$ の基底で、$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ と双対である。

$(dx_i)_p(X)=X\,x_i=\sum_{j=1}^{n}\xi^j\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_p=\xi^i$ となるので、

$(df)_p(X)=Xf=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(dx_i)_p(X)$ すなわち、$(df)_p=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(dx_i)_p$ という形がでてくる。