私たちは次の事実を知っている。

互いに独立な確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ で各々の分布が

$$P(X_k \le x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & (x \ge 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \qquad k = 1, 2, \cdots$$

を持つとき、

（事実１） $S_n = X_1 + \frac{X_2}{2} + \cdots + \frac{X_n}{n}$ の分布は $M_n = \max_{1 \le k \le n} \{X_k\}$ の分布に等しい

（事実２） $S_n - \log n$ の分布は $n \to \infty$ で平均 γ の Gumbell 分布である

事実１）と事実２）を組み合わせて

（事実３） $M_n - \log n$ の分布は $n \to \infty$ で平均 γ の Gumbell 分布である

$S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - 1}{k}$ は互いに独立な確率変数 $\xi_k = \frac{X_k - 1}{k}$ の和で、

$E(\xi_k) = 0, E(\xi_k^2) = \frac{1}{k^2}$ を満たすので、確率論西尾真喜子 p.140

定理２　独立確率変数　$\xi_k, k = 1, 2, \cdots$ が $E\xi_k = 0$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} V(\xi_k) < \infty$ なら、

$\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ は概収束する。

より、

（事実４） $S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - 1}{k}$ は Gumbell 分布を持つ確率変数に概収束する。

オイラーの定数は　$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1)\right\}$ をもちいれば、

（事実５）$S_n - \log n$ は Gumbell 分布を持つ確率変数に概収束する。

また、確率論西尾真喜子 p.140

定理３　独立確率変数　$\xi_k, k = 1,2,\cdots$ が $E\xi_k = 0$ で $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{E\xi_k^2}{k^2} < \infty$ なら、

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ は０に概収束する

上と同様　$S_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{X_k - 1}{k}$ で $\xi_k = \frac{X_k - 1}{k}$ と置くことにより

（事実６）$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \to 1$ が概収束する

これはよく知られた強大数の法則に過ぎない。
むしろ、事実５）から出てくる、次の事実の方が利用価値があろう。
すなわち、

（事実７）$P\left(\frac{S_n}{\log n} \to 1\right) = 1$

から、　$P\left(\frac{M_n}{\log n} \to 1\right) = 1$ は出ないだろうか？

概収束から確率収束がでることと S_n と M_n の分布が等しいことから、

（事実８）確率収束で　$\frac{M_n}{\log n} \to 1$

確率収束列は、概収束する部分列を含むから、

（事実９）ある数列$n_k < n_{k+1}$ で$n_k \in \mathbb{N}$ があり、$\dfrac{M_{n_k}}{\log n_k} \to 1$が a.e で成り立つ。