無理数を有理数で近似するときの誤差について

Sunday, April 2, 2017

これから証明を与えようとするのは次の命題である。

> いま、無理数$x>0$ があるとき、整数n,m が存在して
> $$\left|x-\frac{m}{n}\right|\le\frac{1}{n^2}$$
> が成り立つ。また、この不等式を満たす整数n,mの組み合わせは無限個ある。

証明）Q を正整数とする。区間$[0,1)$ をQ 個の長さの同じ部分区間に分割する。

すなわち、$[0,1)=\left[0,\frac{1}{Q}\right)\cup\left[\frac{1}{Q},\frac{2}{Q}\right)\cup\cdots\cup\left[\frac{Q-1}{Q},1\right)$ 。

そして次に$Q+1$ 個の実数　$0x,1x,2x,\cdots,Qx$ を考える。

実数y の整数部分はガウス記号で$[y]$ と書かれ、その小数部分は$\{y\}=y-[y]$

で表される。$\{0x\},\{1x\},\{2x\},\cdots,\{Qx\}$のうち少なくとも２つは

$\left[0,\frac{1}{Q}\right),\left[\frac{1}{Q},\frac{2}{Q}\right),\cdots,\left[\frac{Q-1}{Q},1\right)$ 　のうち１つに入る（部屋がQ 個のホテルに客が

$Q+1$ 人だとどれかの部屋に２人入る）。それを$\{ix\},\{jx\}$ ，$0\le i<j\le Q$ とする。ひとつの部分区間の長さは$\frac{1}{Q}$ であるから、$\left|\{jx\}-\{ix\}\right|<\frac{1}{Q}$ がわかる。

書き換えると、$\left|jx-[jx]-(ix-[ix])\right|<\frac{1}{Q}$

$n=j-i$，$m=[jx]-[ix]$とおくと n,m は正の整数である。上の不等式は

$|nx-m|<\frac{1}{Q}$ と書き直せるが、両辺をn で割ると

〈１〉 $$\left|x-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{nQ}$$

となる。しかし、$0\le i<j\le Q$を考えると、$n\le Q$ であるから

$\left|x-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{nQ}\le\frac{1}{n^2}$ となり前半が証明できた。

不等式　を満たす　$\dfrac{m}{n}$ が有限個しかないとする。それを、$\dfrac{m_i}{n_i}$　, $i=1,2,\cdots,K$　としよう。つまり、

$$\left|x-\frac{m_i}{n_i}\right|\le\frac{1}{n_i^2}\,,i=1,2,\cdots,K$$

ところが無理数と有理数とは同じになれないのでこの不等式の左辺は決してゼロではない。したがって、

（２） $\dfrac{1}{Q^*}\le\left|x-\dfrac{m_i}{n_i}\right|,\ i=1,2,\cdots,K$

となるような正整数 Q^*　が取れる。前半の証明の Q　の代わりに Q^* をとって前半の証明を繰り返せば、（１）において

（３）　$\left|x-\dfrac{m}{n}\right|<\dfrac{1}{nQ^*}\le\dfrac{1}{Q^*}$

を得るがこの $\dfrac{m}{n}$　は有限個しかないことから、$\dfrac{m}{n}=\dfrac{m_i}{n_i}$ となる i　があるはず。

（２）（３）は矛盾している。つまり、不等式　を満たす　$\dfrac{m}{n}$ が有限個しかないという仮定は誤りである。

証明おわり■