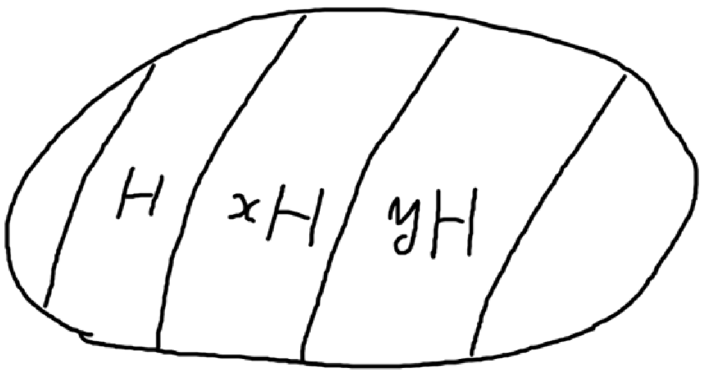
群論はじめの一歩(4)

4.1 剰余類と正規部分群

H を群Gの部分群とする。 GにおけるHを法とする左剰余類と言うのは

$x \in G$ を固定するとき、$xH = \{xh | h \in H\}$ と書けるもので、Gの分割を与える。

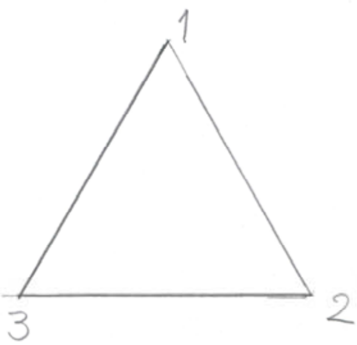


① $G = \bigcup_{x} xH$

② $xH = yH$ か、さもなくば、$xH \cap yH = \phi$

③ $|xH| = |yH|$

[例 $(S_3, \circ)$] 3 角形の対称群



置換群の定義により計算しても良いが、次の演算表で$\sigma \circ \tau$ を見つけ出して計算を実行できる。$\sigma \circ \tau$ はσを１列目からさがし、 τ を１行目から探す、そしてそれらのクロスした項目をみつければ$\sigma \circ \tau$ の値の計算結果を得る。

$\sigma \setminus \tau$	e	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
e	e	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
(123)	(123)	(132)	e	(13)	(12)	(23)
(132)	(132)	e	(123)	(23)	(13)	(12)
(12)	(12)	(23)	(13)	e	(123)	(132)
(23)	(23)	(13)	(12)	(132)	e	(123)
(13)	(13)	(12)	(23)	(123)	(132)	e

$H = \{e, (12)\}$ のとき

左剰余類	**右剰余類**
$H = \{e, (12)\}$	$H = \{e, (12)\}$
$(13)H = \{(13), (132)\}$	$H(13) = \{(13), (123)\}$
$(23)H = \{(23), (123)\}$	$H(23) = \{(23), (132)\}$

$H = \{e, (123), (132)\}$ のとき

左剰余類	**右剰余類**
$H = \{e, (123), (132)\}$	$H = \{e, (123), (132)\}$
$(12)H = \{(12), (23), (13)\}$	$H(12) = \{(12), (13), (23)\}$

この場合、S_3 が非可換であるのにかかわらず、**左剰余類＝右剰余類となっている。**

このように左剰余類＝右剰余類となるような H **は正規部分群という。**

定義: N **を** G **の部分群とするとき、** N **が次の性質を持つものを正規部分群と言い** $N \triangleleft G$ **と書く。** ① $xN = Nx$ **がすべての** $x \in G$ **で成り立つ。**

これは、次の②③④と同等

② $xNx^{-1} = N$ **がすべての** $x \in G$ **で成り立つ。**

また次のものとも同等

③ $xnx^{-1} \in N$ がすべての $x \in G$ すべての $n \in N$ に対して成り立つ。

xnx^{-1} は n の共役といわれ、

④ $n \in N$ の共役要素がまた N の要素になっている

[例] $N = \{e, (123), (132)\} \triangleleft S_3$

$(12)(123)(12)^{-1} = (132) \in N$, $(13)(132)(13)^{-1} = (123) \in N$

[例] $\{e\} \triangleleft G$, $G \triangleleft G$ は自明な正規部分群

[例] G が可換（アーベリアン）の時は任意の部分群 H について $H \triangleleft G$ 。

$xh = hx \Rightarrow xH = Hx$

[例] $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = n\mathbb{Z}, n \geq 2$ のとき G が可換であるので

H は正規部分群。ただし、$\mathbb{Z}$ は整数全体。

[例] $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = \mathbb{Z}$ のとき、G が可換であるので H は正規部分群

ただし、$\mathbb{Q}$ は有理数全体。

4.2 中心

$Z(G) = \{x \in G \mid gx = x, \forall g \in G\}$ を G の中心と呼ぶ。特に、G が可換群のときは

$Z(G) = G$ となってしまう。

$Z(S_3) = \{e\}$

D_8 ＝正方形の対称群

$Z(D_8)=\{e,(13)(24)\}$

4.3 剰余群

$H,K\subseteq G$ のとき、$HK=\{hk\,|\,h\in H,k\in K\}$ とおく。つぎの便利な式を証明しよう。

補題　H を G の部分群とするとき、$HH=H$ が成り立つ。

証明）H はそれ自身群であるから積で閉じており $h_1,h_2\in H$ のとき、$h_1h_2\in H$ すなわち、$HH\subseteq H$ である。また H はそれ自身群であるから単位元 $e\in H$ したがって、任意の $h\in H$ について $h=he\in HH$ 。言い換えれば $H\subseteq HH$ 。■

さて、いま $N\triangleleft G$ を仮定する。そして、商を $G/N=\{xN\,|\,x\in G\}$ で定義する。

これは、”N を法とする G の分類”=剰余類　である。このとき、G の演算（掛け算）は G/N に遺伝する。つまり、

$(xN)(yN)=xNyN$

$=xyNN$ （N が正規部分群であるから）
$=xyN$ （上の補題より $NN=N$ ）
したがって、この“掛け算“により、G/N は群（剰余群）となる。
実際、

①$(xN)(yN)=xyN$ （$xN,yN\in G/N\Rightarrow(xN)(yN)\in G/N$ ）

②単位元は N 。なぜなら $(xN)\cdot N=N\cdot(xN)=xN$ が任意の $x\in G$ で成立。

③結合律　$(xNyN)zN=(xyN)zN=xyzN$ ，$xN(yNzN)=xN(yzN)=xyzN$ より

$(xNyN)zN=xN(yNzN)$。

④逆元　$(xN)^{-1}=x^{-1}N$ なぜなら　$(xN)(x^{-1}N)=xx^{-1}N=eN=N$　N は②より単位元であった。

①②③④よりG/Nは群となり商群（剰余群）と呼ばれる。
定義から明らかなように、G が可換である場合G/Nも可換である。そして
G が有限群のときは、G/Nの位数$|G/N|$はすなわち、剰余類の要素の個数は
指数$[G:N]=\dfrac{|G|}{|N|}$ であることは一般の場合すでに述べた。

[例S_3] $N=\{e,(123),(132)\}\lhd S_3$ に対して

$G/N=\{N,(12)N\}$ である。$|G/N|=2$ （$|G|=3!=6$ $|N|=3$ であるから

$|G/N|=\dfrac{|G|}{|N|}$ が成立しているのがわかる）。また、$(12)N(12)N=N$ であるから、

G/N は$(12)N$ を生成元とする位数２の巡回群である。$G=S_3$ ， Nは非可換

であるが G/Nは可換群となっている。

[例 G=$(\mathbb{Z},+)$] $N=n\mathbb{Z},n\geq 2$.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{0+N,1+N,\cdots,(n-1)+N\}$ **modular integer**

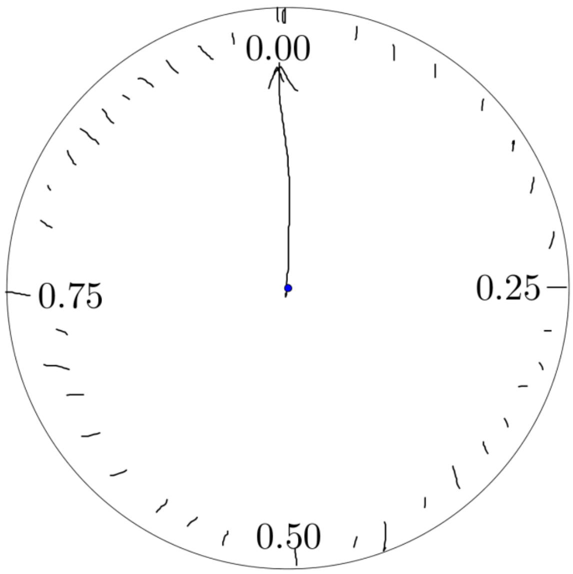
mod n で考えた整数

$|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|=n$ であり、

$\overbrace{(1+N)+(1+N)+\cdots+(1+N)}^{k}=k+N$ より$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$は生成元$1+N$ の巡回群で、可換群である。特に$n=2$ の時は$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は偶数$0+N$ 、奇数$1+N$ からなる。

[例$G=(\mathbb{Q},+)$] $N=\mathbb{Z}$。$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は有理数の小数部分で時計のメモリが0.0 から

$1.0=0.0$ となっている。$\mathbb{Q}$の各元は小数部分をとる操作で$\mathbb{Q}\cap[0,1)$ に写像される。結果的に $\mathbb{Q}$を時計の針で何周か（整数回）回ったものが表示される。



$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は無限集合であるが、各要素は有限位数をもつ。たとえば、$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ は

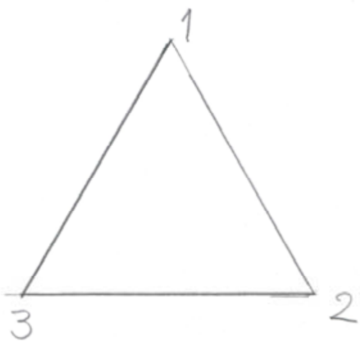
$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2=0$ であるから、位数3 すなわち、$\left|\frac{2}{3}\right|=3$ である。

上の例では

$N=\{e,(123),(132)\} \triangleleft S_3$

は三角形を 120° 右回り回転 (123) した結果、それを２回 $(123)\circ(123)=(132)$

つまり 240° 回転を表すが、$(12)N=\{(12),(23),(13)\}$ **としたものは一つのある頂点は**



固定して、他の頂点をいれかえたもの（鏡映）を表している。

このように商群 G/N とは、群のおおまかな構造を明らかにしてくれるレントゲン写真である。