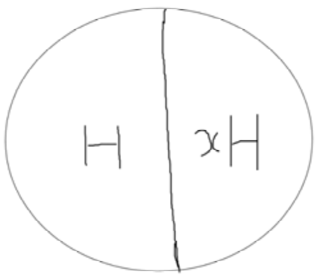
群論はじめの一歩(6)
6. 指数２の定理と２面体群

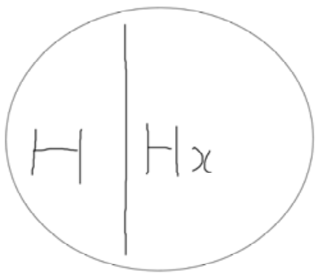
命題
H を群G の部分群とする。そして、左剰余類全体G/H　、右剰余類全体$H\backslash G$　ともに指数$[G:H]=2$　と仮定する。

このとき、H は群G の正規部分群である。すなわち、$H \triangleleft G$

注意）集合A　とB　があるとき、A　からB　を引いた差集合は$A\backslash B$　と書かれるが、ここで書いた$H\backslash G$は差集合ではなく右剰余類の集合の意味である。混乱するが数学の慣習であるから仕方がない。
次の証明ではこれらの記号のうち差集合G/Hが出てくる。
証明）$xH=Hx$　，　$\forall x\in G$　を示せばよい。
case1）$x\in H$　のとき、$xH=H$，　$Hx=H$　であるから$xH=Hx$。
case2）$x\notin H$のとき、$xH\cap H=\phi$　であり、$xH=G\backslash H$　（G　からH　を引いた差集合）。　同様に$Hx\cap H=\phi$であり$Hx=G\backslash H$（G　からH　を引いた差集合）。よって$xH=Hx$　。（そしてくどいけど、$Hx=H\backslash G$でもある）



左剰余類によるGの分割



右剰余類によるGの分割

証明おわり■

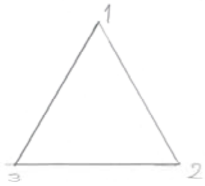
説明）$x\notin H$のとき商群$G/H=\{H,xH\}$は要素２個からなる群であり、単位元は

H　xH　は位数２、つまり$G/H=\{H,xH\}$はxHを生成元とする巡回群である。

①Hが単位元：$HH=H$，　$(xH)H=H(xH)=xH$であるから。

② xH は位数２：$(xH)(xH) \in G/H = \{H, xH\}$ であるから、$(xH)(xH) = xH$ または$(xH)(xH) = H$ 。しかし、最初の場合$(xH)(xH) = xH$ は起こらない。なぜなら消去法則により、$(xH) = H$ となってしまい $x \notin H$ に矛盾。$(xH)(xH) = H$ は xH の位数が２を示している。■

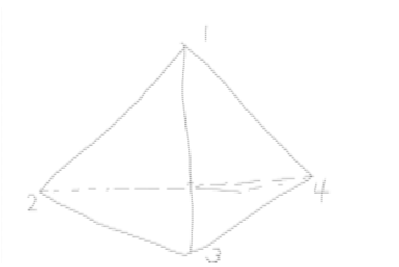
［例 S_3］ S_3 は $\{1,2,3\}$ の置換群である。位数は $3! = 6$ 。



$H = \{e, (123), (132)\}$ とする。$|S_3| = 6$ ，$|H| = 3$ であるから、指数 $[S_3 : H] = 2$ となる。したがって命題より H は正規部分群、すなわち、$S_3 / H = \{H, (12)H\}$ は商群である。

［例 S_4］S_4 は $\{1,2,3,4\}$ の置換群である。位数は $4! = 24$ 。

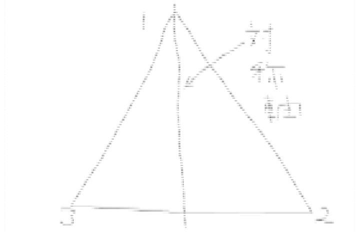
S_4 のうち偶置換 A_4 （偶数個の互換の積で表されるもの）は位数 12 である。



奇置換（奇数個の互換の積）も 12 個あるが、奇置換はその積が奇置換とはならないので群を構成しない。S_4 ＝{偶置換} ∪ {奇置換}だが、これは

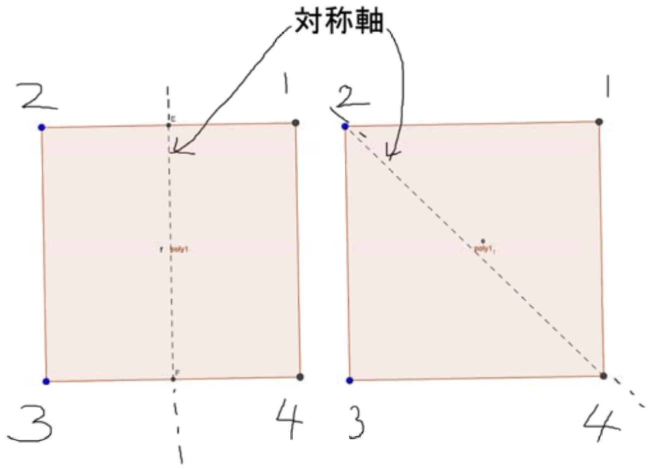
S_4 / A_4 ={偶置換, 奇置換}という２要素からなる商群になる。実際この場合も指数が $[S_4 : A_4] = \dfrac{|S_4|}{|A_4|} = 2$ となっているので命題が適用できた。

［例 D_{2n}］ D_{2n} は位数 $2n$ の２面体群である。正 n 角形を平面上におきそれを中心の周りに回転して頂点を一個づつずらしながらもとの位置を保つもの、対称軸をとりそれを折り返し（鏡映）つまり対応する頂点を入れ替えながらもとの位置を保つものからなる。



$D_6 = S_3$ は 120° の回転（３回、回すと元に戻る）と、対称軸に関する折り返し（鏡映）からなる。回転は (123) で、$\{e,(123),(132)\}$ という巡回群。一回転 (123)、２回転 $(123)\circ(123)=(132)$、３回転 $(123)\circ(123)\circ(123)=(132)\circ(123)=e$ となり (123) の位数は 3 、他方上の図の対称軸での折り返しは (23) である。おり返しを２回繰り返すと $(23)\circ(23)=e$ と元に戻る。いまは、１を固定したが、対称軸の取り方はほかに２本ある（頂点の数だけある）。

D_8 は正方形（正４角形とは普通いわない）で、90° の回転（４回くりかえすと元に戻る）と対称軸に関する折り返しからなる群を作り、対称軸は相対する頂点を結ぶものと、相対する辺を結ぶものがある。



90° の回転は (1234) で rotation $R_4 = \langle(1234)\rangle$ となる位数４の部分群。

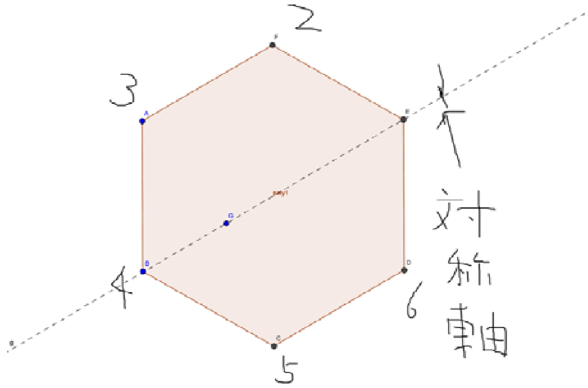
鏡映は辺 12 の中点と辺 34 の中点を結んだ対称軸の方が $(12)(34)$

対称軸が 2--4 の方が

(13) となる。

D_{12} は正６角形で、位数６の (123456) という 60° の回転と、たとえば頂点１と頂点４ をとおる直線を対称軸とする、$(26)(35)$ のような鏡映である。

$|D_{12}|=12$ で60° の回転R_6 は位数が$|R_6|=6$より、D_{12}/R_6は指数$[D_{12}:R_6]=2$ となるので、回転R_6は２面体群D_{12} の正規部分群となる。対称軸の取り方は他にもあり、



全部で６本（頂点どおしを結ぶもの３本、対応する辺の中点を結ぶもの３本）である。

一般に位数$2n$ の２面体群D_{2n} は、平面上におかれた正n 角形を$\dfrac{2\pi}{n}$だけ回転する$(123\cdots n)$ と、対称軸に関する折り返しτとからなる。その場合対称軸の取り方はn が偶数だと頂点どおしを結ぶものがn 本、対応する辺の中心どおしを結ぶものがn 本ある。n が奇数のときの対称軸は、頂点と対応する辺の中点を結ぶn 本からなる。回転から作る部分群$R_n=\langle(1,2,\cdots,n)\rangle$ は位数n の巡回群、したがって適当に鏡映τをえらぶと 商群$D_n/R_n=\{R_n,\tau R_n\}$ ができ、$D_{2n}=R_n\cup\tau R_n$ のように分解される。指数$[D_{2n}:R_n]=2$ ということから、R_n が正規部分群$R_n\triangleleft D_{2n}$ ということがやはり命題から従う。まとめると、２面体群D_{2n}は

① 正規部分群である回転群R_n （$R_n\triangleleft D_{2n}$）と

② 位数２の鏡映τ

により構成される。回転群はn 個の時刻からなる時計のはりの動きなので$R_n\cong\mathbb{Z}/n$のようにも表される。

また抽象的だが次のような考察ができる。複素平面において実軸が対称軸となるように正n角形を置く。回転r は$e^{2\pi i/n}$ を掛け算すること。鏡映c は共役複素数を与えること。つまり複素数zに対して

$r(z)=e^{2\pi i/n}z$ ， $c(z)=\overline{z}$ 。次のことに注意しよう。$c^2=e$ すなわち

$c=c^{-1}$ である。実際$cc(z)=c(\overline{z})=\overline{\overline{z}}=z$ 。また、$crc^{-1}=r^{-1}$。なぜなら、

$$crc^{-1}(z)=cr(\overline{z})=c\left(e^{2\pi i/n}\overline{z}\right)=e^{-2\pi i/n}z=r^{-1}(z)$$

であるから。つまり、D_{2n} はr,c という生成元をもち、

①$r^n=e$ ②$c^2=e$ ③$crc^{-1}=r^{-1}$ （$cr=r^{-1}c$ ）
という性質で完全に記述される。まとめて

$$D_{2n}=\left\{r^k,cr^k \middle| 0\le k<n\right\}$$

と表す。

［例D_{2n} の中心$Z(D_{2n})$ ］

$Z(D_{2n})=\left\{x\in D_{2n} \middle| gx=xg\ \forall g\in D_{2n}\right\}$が中心の定義であった。そこで、

①$x=r^k,g=r^l$ のときは$gx=xg$ は常に成り立つ
②$x=cr^k,g=r^l$のときは
$gx=r^lcr^k=cr^{-l}r^k=cr^{k-l}$
$xg=cr^kr^l=cr^{k+l}$

したがって$gx=xg$が成立するためには、$r^{k-l}=r^{k+l}$ すなわち$r^{2l}=e$と

なる。これがすべてのl でなりたつことはできない。

③$x=r^k,g=cr^l$のときは、k,l を逆にして②と同様の議論で、$r^{2k}=e$

$2k=n$をえる。n が奇数だとこれは起こりえないがn が偶数だと①とあわせて、

$$Z(D_{2n})=\begin{cases} e & n\text{が奇数のとき} \\ e,r^k & n\text{が偶数のとき}n=2k \end{cases}$$

となる。

このことを行列を使って考えてみよう。

$M_r = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{bmatrix}$ は角度 $\frac{2\pi}{n}$ の回転 r を表すが、これを l 回繰り返したもの r^l は

$$M_{r^l} = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi l}{n} & -\sin\frac{2\pi l}{n} \\ \sin\frac{2\pi l}{n} & \cos\frac{2\pi l}{n} \end{bmatrix} = M_r^l$$

そして、鏡映 c をあらわす行列は

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

これらをかけて $M_{cr^l} = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi l}{n} & -\sin\frac{2\pi l}{n} \\ -\sin\frac{2\pi l}{n} & -\cos\frac{2\pi l}{n} \end{bmatrix}$ をえる。これらは一般に交換可能な行列でないが、$n = 2k$ のとき

$M_{r^k} = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi k}{2k} & -\sin\frac{2\pi k}{2k} \\ \sin\frac{2\pi k}{2k} & \cos\frac{2\pi k}{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ をえてこの行列だけが任意の行列と交換可能なものを与える。つまり、180° の回転である。n が奇数だと 180° の回転をつくれない。