群論はじめの一歩(2)

2.1 部分群

$G=(G,\circ)$ を演算。 が与えられた群とするとき、同じ演算を持つ部分群 $H=(H,\circ)$ を考えることができる。

定義：G の空でない部分集合 H に対し次の条件①－③を満たすとき、$(H,\circ)$は$(G,\circ)$の部分群であるという。

①演算で閉じている：$x,y\in H \Rightarrow x\circ y\in H$

②逆元の存在： $x\in H \Rightarrow x^{-1}\in H$ （この x^{-1} はG における逆元）

③単位元の存在：$e\in H$ （このe はG における単位元でもある）

この定義で、③は①と②から導かれるので定義の条件から除くことができる。実際、H は空だないのである$x\in H$がとれ、②より$x^{-1}\in H$であり、①より $x\circ x^{-1}\in H$となるが、これは③を意味している。■

さらに部分集合Hが有限集合である時には、$(H,\circ)$が$(G,\circ)$の部分群であるための条件は①のみでよい。つまり、次の命題が成立する。

命題；$(G,\circ)$を群とする。 G の空でない有限部分集合H に対し$x,y\in H \Rightarrow x\circ y\in H$が成り立つとき、$H$に逆元$x^{-1}\in H$が存在する。

ここで、最初に注意しておかなくてはならない。$x \in H$ は $x \in G$ を意味するので、$x^{-1} \in G$ は存在する。しかし、この x^{-1} が H に属していることが命題の意味するところである。

$x \in H$ を選ぶ（H は空でないので）。仮定より $x^2 = x \circ x \in H$ 。さらに、$x^3 = x^2 \circ x \in H$ が成立する。同様に繰り返して、$\{x, x^2, \cdots\} \subset H$ が得られる。しかし、H は有限部分集合であることから、$x, x^2, \cdots$ のすべてが異なることはない。つまりある $n, m(m < n)$ で $x^n = x^m$ となっている。これは、$x^{n-m} \circ x^m = x^m$ を意味する。群 $(G, \circ)$ においても $x^{n-m} \circ x^m = x^m$ が成立していることから消去法則を用いて、$x^{n-m} = e$ がわかる。$k = n - m$ とおく。つまり、$x^k = e$ 。

①$k = 1$ のとき、$x = e$ となり、$x^{-1} = e$ とすればよい。（この場合 H はもともと自明な部分群 $H = \{e\}$ であったわけである。）

②$k > 1$ のとき、$x^{k-1} \circ x = x \circ x^{k-1} = e$ とかけることから、x^{k-1} が x の逆元で $x^{k-1} \in H$ が言えている。■

［ 例：自明な部分群］ $H = \{e\}$ と $H = G$ は自明な部分群と呼ばれる。

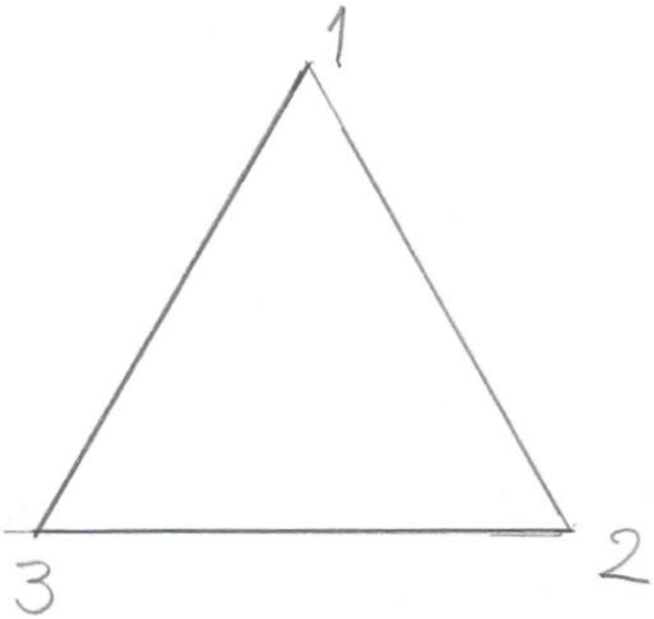
[例：整数の加法群] $G = (\mathbb{Z}, +)$ に対して $H = 2\mathbb{Z}$ すなわち偶数全体は $\mathbb{Z}$ の部分群である。それは①演算で閉じている：偶数＋偶数＝偶数② $g = 2k$ の逆元 $-2k$ も偶数である。③単位元０は偶数である。
しかし、奇数全体は①を満たさないので部分群とはなれない。

また一般に　$n\mathbb{Z}=\{nx|x\in\mathbb{Z}\}$　は$G=(\mathbb{Z},+)$の部分群である。

[例 Modular integers]　$(\mathbb{Z}/10,+)$　整数を１０で割った余り

$\mathbb{Z}/10=\{0,1,2,\cdots,9\}$　に対して　$H_1=\{0,5\}, H_2=\{0,2,4,6.8\}$は部分群である。

[例　$(S_3,\circ)$　]



$H_1=\{e,(1,2)\}$　，$H_2=\{e,(1,2,3),(1,3,2)\}$　は部分群である。特にいずれも巡回群である。

ここで群G　が生成元g　とする巡回群であるとは、g　により生成される群 $G=\{\cdots,g^{-2},g^{-1},e,g,g^2,\cdots\}$　のことで、$G=\langle g\rangle$　という記号を用いる。上の場合、

$H_1=\langle(1,2)\rangle$　，$H_2=\langle(1,2,3)\rangle$　となる。なぜなら、$(1,2)\circ(1,2)=e$　であり、

$(1,2,3)\circ(1,2,3)=(1,3,2)$　、$(1,2,3)\circ(1,2,3)\circ(1,2,3)=e$が成立することを確かめればよい。

定義：群G がある$g\in G$ を用いて$G=\langle g\rangle$ と表せるとき、巡回群と呼ばれる。
その際、Gの要素の個数を位数と言う。

[例　整数]

①$\mathbb{Z}=\langle 1\rangle$ 無限巡回群

②　n で割ったあまりでつくる群　$\mathbb{Z}/n=\langle 1\rangle$　位数n

S_3 は巡回群ではない。しかし、1 つの生成元では生成されないが、2 つの生成元を用いれば成生できる。そのために、上の記号と概念を生成元が複数個ある場合に一般化する。

$\langle g_1,g_2,\cdots\rangle=$ g_i $i=1,2,\cdots$ で生成される群

= $\{g_i,g_i^{-1},i=1,2,\cdots$たちのあらゆる積$\}$

＝$\langle g_i\rangle$ $i=1,2,\cdots$ を含むすべての部分群の共通部分

この定義に意味を持たせるためにはつぎの命題が必要である。

H_i，$i=1,2,\cdots$ がG の部分群であるなら、$\bigcap H_i$ もG の部分群である。

証明）①$x,y\in\bigcap H_i \Rightarrow x,y\in H_i$ ，$\forall i \Rightarrow x\circ y\in H_i,\forall i \Rightarrow x\circ y\in\bigcap H_i$

②　$x\in\bigcap H_i\Rightarrow x^{-1}\in H_i,\forall i\Rightarrow x^{-1}\in\bigcap H_i$

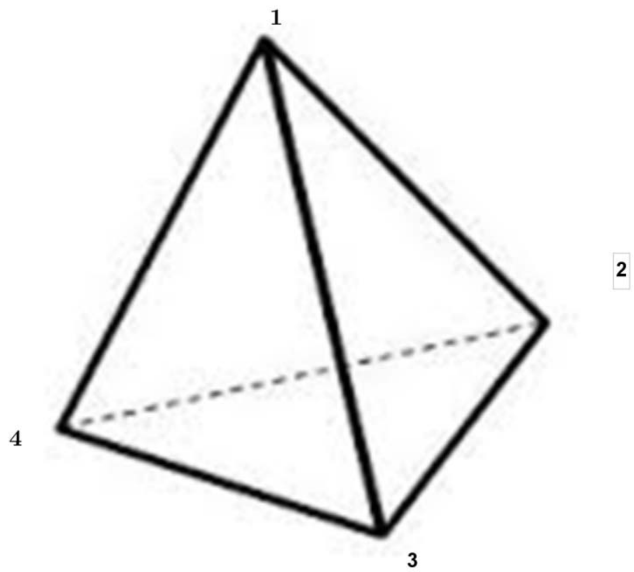
③　$e\in H_i$ ，$\forall i\Rightarrow e\in\bigcap H_i$ ■

[例 S_3]　$S_3=\langle(12),(123)\rangle=\langle(12),(13)\rangle$

[例　S_4　]

部分群 A_4　$=\langle all\ cycles\rangle$　：正四面体の合同変換

下図において $(12)(34)$ は、辺１２と辺３４の中点どおしを結ぶ直線を軸とする 180°　回転を表す



$|S_4|=24$　、$|A_4|=12$

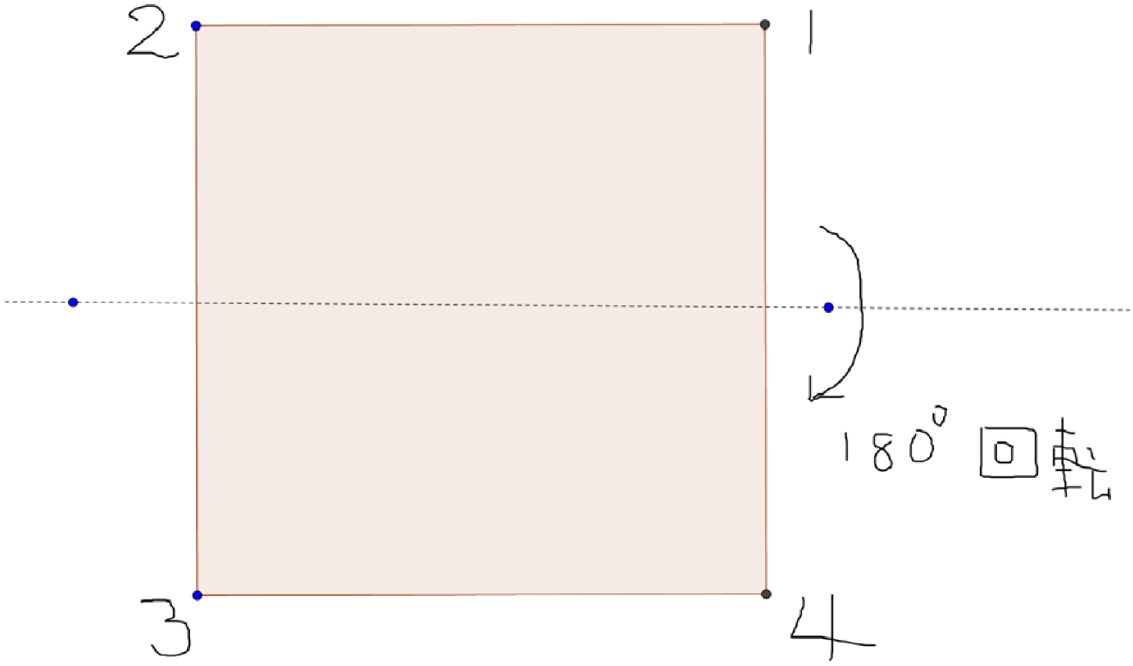
$A_4=\{e,(234),(134),(124),(123),(243),(143),(142),(132),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$

$H=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$

は S_4　の部分群

[例 D_8　]

$D_8=\langle(1234),(14)(23)\rangle$



(1234) は正方形を反時計回りに 90° 回転することを意味しており、$(14)(23)$ は正方形の中心を通る横軸（図の点線）の周りに 180° 回転することを意味する。

D_8 は正方形の合同変換で (1234) と $(14)(23)$ の組み合わせで生成される。

これは模擬的に複素平面（ガウス平面）で考えると (1234) は $z \to iz$ を $(14)(23)$ は $z \to \bar{z}$ （共役複素数）の演算を表していると考えることができる。