# 複素偏微分作用素１

Sunday, May 7, 2017

Akio Arimoto

複素数$z=x+iy$とするとき、複素関数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

において、$x,y$ を変数と思うより、$z$ とその共役 $\overline{z}$ を変数と考える方が便利なことが多い。（つまり、$(z,\overline{z})\to(x,y)$ から生じる引き戻しを考える）

$z=x+iy$ より、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1 \ , \ \frac{\partial z}{\partial y}=i$$

$\overline{z}=x-iy$より,

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial x}=1,\frac{\partial \overline{z}}{\partial x}=-i$$

となる。 $x,y$ を独立変数とする実数値関数$u(x,y)$ に対し微分についての連鎖定理を形式的に適用すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}-i\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}$$

が得られる[1]。

表記を簡単にするために、$\frac{\partial u}{\partial x}=u_x,\frac{\partial u}{\partial z}=u_z$ などと書くと

$u_x=u_z-iu_{\overline{z}}$ となる。同様に

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}$$ より

$u_y=u_z+iu_{\overline{z}}$を得る。$u_x=u_z-iu_{\overline{z}}$、 $u_y=u_z+iu_{\overline{z}}$

を解いて

---

1 脚注 : 厳密にいえば$u(x,y)=u\left(x(z,\overline{z}),y(z,\overline{z})\right)$ としているので右辺の$u$ と左辺の$u$ は記号を変える必要があるが、かえって手間なのでわるい慣用に従った。これは記号の濫用と呼ばれる。

$$u_z = \frac{1}{2}\left(u_x - iu_y\right)、u_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(u_x + iu_y\right)$$

すなわち、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

を得る。そこで、**複素偏微分作用素**を次で定義する。

**定義）複素偏微分作用素**

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

したがって、$\frac{\partial z}{\partial z} = 1$ 。これは当たり前と思ってはダメで、当たり前と考えるのは前頁脚注１）の記号の濫用からくる間違いで、以下のようにいちいち確かめる必要がある。すなわち、

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - i\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - i \times i\right) = 1$$

と計算しなければならない。同様に、

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + i\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + i \times i\right) = 0$$

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{z}}{\partial x} - i\frac{\partial \overline{z}}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - i \times (-i)\right) = 0$$

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{z}}{\partial x} + i\frac{\partial \overline{z}}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + i \times (-i)\right) = 1$$

となり、$z$ と $\overline{z}$ は独立変数のように扱っても不都合がないことがわかる。

また、複素偏微分作用素を $f(z)$ に**線形に**適用して

$$f_z = \frac{\partial}{\partial z} f(z) = u_z + iv_z,\ f_{\overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = u_{\overline{z}} + iv_{\overline{z}}$$

などという計算をする[2]。

$$u_z=\frac{1}{2}\left(u_x-iu_y\right),u_{\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(u_x+iu_y\right)$$

$$v_z=\frac{1}{2}\left(v_x-iv_y\right),v_{\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(v_x+iv_y\right)$$

を用いると

$$f_z=\frac{1}{2}\left(u_x-iu_y\right)+\frac{i}{2}\left(v_x-iv_y\right)=\frac{1}{2}\left(\left(u_x+v_y\right)+i\left(v_x-u_y\right)\right)$$

$$f_{\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(u_x+iu_y\right)+\frac{i}{2}\left(v_x+iv_y\right)=\frac{1}{2}\left(\left(u_x-v_y\right)+i\left(v_x+u_y\right)\right)$$

を得る。また、

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\overline{f}=\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(u-iv)=u_{\overline{z}}-iv_{\overline{z}}=\frac{1}{2}\left\{\left(u_x+iu_y\right)-i\left(v_x+iv_y\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(u_x+iu_y\right)-i\left(v_x+iv_y\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\left(u_x+v_y\right)-i\left(v_x-u_y\right)\right)=\overline{f_z}$$

すなわち、

$$\boxed{\overline{\frac{\partial}{\partial z}f}=\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\overline{f}}$$

を得る。

[2] 脚注：実はここにも $f(z)=f(z,\overline{z})$ という記号の濫用がつかわれており、$f(z,\overline{z})$ が正則な場合 $\frac{\partial f(z,\overline{z})}{\partial z}=\frac{df(z)}{dz}$, $\frac{\partial f(z,\overline{z})}{\partial\overline{z}}=0$ が成り立つことが後で示されるので、上で間違いといったことは、結果として当たり前の計算で正しいことになる。

補題： $f$ が $z=z_0$ の近傍で $C^1$ とするとき $z\to z_0$ で

$$f(z)=f(z_0)+f_z(z_0)(z-z_0)+f_{\overline{z}}(z_0)(\overline{z}-\overline{z}_0)+o(|z-z_0|)$$

が成立する。ここで、$o(\varepsilon)$ は $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}=0$ である。

この式は

$$f(z,\overline{z})=f(z_0,\overline{z}_0)+f_z(z_0,\overline{z}_0)(z-z_0)+f_{\overline{z}}(z_0,\overline{z}_0)(\overline{z}-\overline{z}_0)+o(|z-z_0|)$$

と書かれるべきである。

しかし上の表現において記号の濫用は承知の上で、いっそのこと独立変数を陽には書かず単に $f$ として、全微分（微分一形式）をもちいて、

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

とあらわしてやる。他方で、

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

とも表される。しかし、つぎの計算をすると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}&=\frac{1}{2}\left(\left(u_x+v_y\right)+i\left(v_x-u_y\right)\right)(dx+idy)+\frac{1}{2}\left(\left(u_x-v_y\right)+i\left(v_x+u_y\right)\right)(dx-idy)\\&=\left(u_x+iv_x\right)dx+\left(u_y+iv_y\right)dy\end{aligned}$$

となるので、独立変数の違いであらわされた２通りの表現は実は等しくなることがわかる。

**例題１．** $z=x+iy$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial x}z^n=nz^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}z=nz^{n-1}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}z^n=nz^{n-1}\frac{\partial}{\partial y}z=inz^{n-1}$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial z}z^n=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)z^n=\frac{1}{2}\left(nz^{n-1}-i^2nz^{n-1}\right)=nz^{n-1}$$

となる。

どうやら定義に戻って計算しなくても、普通の偏微分と考えて計算してもよさそうである。たとえば、

**例題２.**

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(4\overline{z}^2 - z^3\right) = -3z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\overline{z}^2 + z^2\overline{z}^3\right) = 2\overline{z} + 3z^2\overline{z}^2$$

$$\frac{\partial^5}{\partial \overline{z}^3 \partial z^2}\left(\overline{z}^2 - z\overline{z} + 4z - 6z^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z} \partial z}\left(\overline{z}z^2 - z^3\overline{z} + 7z\right) = 2z - 3z^2$$

複素偏微分の効用を述べておこう。

$f(z)$ が $z = z_0$ で正則であるとは、$z = z_0$ の近傍で微分可能なことである。つまり、$\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\dfrac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} + \dfrac{1}{z - z_0} o\left(\left|z - z_0\right|\right)$ において、

$z \to z_0$ として極限が存在することである。$z \to z_0$ のとき右辺最後の項はゼロに行く。しかし、$\dfrac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0}$ は一般に極限を持たない。実際、$z = z_0 + h$ 、$h$ 実数としてやると $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = 1$。また $z = z_0 + ih$ としてやると $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = -1$ となってしまう。従って $z \to z_0$ として極限が存在するための必要十分条件は

$f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ となることである。

$f_{\overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(u_x + iu_y\right) + \dfrac{i}{2}\left(v_x + iv_y\right) = \dfrac{1}{2}\left(\left(u_x - v_y\right) + i\left(v_x + u_y\right)\right)$ であったから、$u_x - v_y = 0$ かつ $v_x + u_y = 0$ という条件となる。これはコーシーリーマンの方程式と呼ばれる。

まとめると：

$C^1$ 級、複素関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ において、

$$u_x=v_y,\ u_y=-v_x \ \Leftrightarrow\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$$

また、グリーンの公式は

有限個の単純閉曲線で囲まれた領域を $D$ とし、その境界を $\partial D$ と書くと
$\int_{\partial D} f(z)dz=\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dxdy$ が成立する。

したがって、有限個の単純閉曲線で囲まれた領域 $D$ に対し $f(z)$ が $\bar{D}$ で正則を仮定する。すなわち、$D$ で $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ であるなら、$\int_{\partial D} f(z)dz=\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dxdy=0$ となり、これはコーシーの積分定理をあたえており、記憶しやすい形でのべられる。

## 参考文献

*複素解析　一変数解析関数　　笠原　乾吉　ちくま学芸文庫*