Gumbell 分布関数

11 November 2016

Akio Arimoto

$G(x)=\exp(-\exp(-x)), x\in\mathbb{R}$ は、単調増加関数で、$G(-\infty)=0, G(+\infty)=1$ であるのでそれから導かれる分布は Gumbell 分布と呼ばれる。また、密度関数は $\dfrac{dG}{dx}=e^{-x}G(x)$ と書ける。分布 $G(x)=\exp(-\exp(-x))$ に対応する確率変数を $X(\omega)$ とおく。期待値は $EX=\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-u}\exp(-\exp(u))du=\gamma$ =0.57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 93992 3598805767 23488 48677 2677766467 09369 47063 29174 67495...というオイラーの定数になる。そして、X の特性関数はガンマ関数 $\Gamma(z)$ を用いて $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}dG(u)=\Gamma(1-it)$ となる。$G(x)=\exp(-\exp(-x)), x\in\mathbb{R}$ は $G^n(x+\log n)=G(x), x\in\mathbb{R}$ という関数方程式をみたす。逆にこの関数方程式をみたす関数 $\Lambda(x)$ があるとき $\Lambda(x)=\exp(-\exp(-x))$ がいえるかという問題を考えてみよう。対数をとりたいので $0<\Lambda(x)<1, x\in\mathbb{R}$ という仮定と $\Lambda(x)$ の微分可能性を仮定すると、次がいえる。

命題：$\Lambda(x)$ は関数方程式 $\Lambda^n(x+\log n)=\Lambda(x), x\in\mathbb{R}$ を満たし、

微分可能で　$0<\Lambda(x)<1, x\in\mathbb{R}$、$\Lambda(0)=e^{-1}$ とする。

このとき、$\Lambda(x)=\exp(-\exp(-x)), x\in\mathbb{R}$ となる。

一般に Gumbell 分布は$\Lambda(x)=\exp(-\exp(-\left(\dfrac{x-\mu}{\eta}\right))), x\in\mathbb{R}$ という形をしているので Gumbell 分布の特徴づけという意味では$\Lambda(0)=e^{-1}$の仮定は不要である。結果をきれいに見せるためにこのような仮定をした。

証明） $\Lambda^n(x+\log n)=\Lambda(x), x\in\mathbb{R}$ の両辺の対数を２回とると

$\log n+\log(-\log\Lambda(x+\log n))=\log(-\log\Lambda(x))$ という関係式がでてくる。いま、

$\lambda(x)=\log(-\log\Lambda(x))$ とおくと$\lambda(0)=0$であり$\lambda(x)$ は微分可能で

$\log n+\lambda(x+\log n)=\lambda(x)$ を満たす。$\lambda(x)=-x$を示せば目的の結果を得る。

この式で、x の代わりに、$x-\log n$ を代入すると$\log n+\lambda(x)=\lambda(x-\log n)$を得る。$n=1,2,\cdots$ は任意だったから、結局

$\lambda(x)=\lambda(x+\log n)+\log n=\lambda(x-\log m)-\log m \quad n,m=1,2,\cdots$

が導かれたことになる。$\lambda(x)=\lambda(x+\log n)+\log n$で、$x$ の代わりに$x-\log m$ を

代入すると$\lambda(x-\log m)=\lambda(x+\log n-\log m)+\log n$

であるが、$\lambda(x-\log m)=\lambda(x)+\log m$ であったから、結局

$\lambda(x+\log n-\log m)=\lambda(x)+\log m-\log n$

を得る。$m\neq n$のときこれは

$\dfrac{\lambda\left(x+\log\dfrac{n}{m}\right)-\lambda(x)}{\log\dfrac{n}{m}}=-1$ と書くことができるが、$m\neq n$ で$\dfrac{n}{m}\to 1$ となるように

自然数をえらべば、$\dfrac{d\lambda}{dx}=-1$ がわかる。したがってある定数c を用いて

$\lambda(x)=-x+c$ となる。ところが$\lambda(0)=0$であったから、$\lambda(x)=-x$をえる。■

実は証明をよく見ると$\Lambda(x)$ の微分可能性は必要なく単に連続であればよい。

$\lambda(x+\log n-\log m)=\lambda(x)+\log m-\log n$ より、$x=0$ として、$\lambda\left(\log\frac{n}{m}\right)=-\log\frac{n}{m}$ をえるが、実数の稠密性から任意の実数e^x に収束するように有理数$\frac{m}{n}$ をえらんでやれば、$\lambda(x)$ の連続性から、$\lambda(x)=-x$がえられる。さらに有界変分なら可算個の点を除いて連続であり、連続より弱い条件で、次がしめせるだろう。

定理：$\Lambda(x)$は関数方程式$\Lambda^n(x+\log n)=\Lambda(x), x\in\mathbb{R}$を満たし、

有界変分（非減少関数）で　$0<\Lambda(x)<1, x\in\mathbb{R}$、$\Lambda(0)=e^{-1}$ とする。

このとき、$\Lambda(x)=\exp(-\exp(-x)), x\in\mathbb{R}$となる。

さて、$G(x)$ の特性関数を実際に計算してみよう。

$\varphi(t)=Ee^{itX}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}dG(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}e^{-u}e^{-e^{-u}}du$において、$x=e^{-u}$ と変数変換すると

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}e^{-u}e^{-e^{-u}}du=\int_{0}^{\infty}x^{-it}e^{-x}dx$となる。しかし、これは、ガンマ関数にほかならず

$\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}e^{-x}x^{z-1}dx$とおくと、$\varphi(t)=\Gamma(1-it)$ ということになる。関数$\varphi(t)=Ee^{itX}$のtに関して微分した$\varphi'(t)=EiXe^{itX}$で、$t=0$ とすると$-i\varphi'(0)=EX$ である。

他方、$\varphi(t)=\Gamma(1-it)$を微分して$t=0$ とすると$\varphi'(0)=-i\Gamma'(1)$であるから、

$EX=-\Gamma'(1)$ をえる。ここで、微分を期待値の中に入れてしまったが、それは

$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x^{-it}e^{-x}dx$ において、$\dfrac{\partial x^{-it}}{\partial t}=-i\log x\ x^{-it}$ より、積分と微分の交換を用いて、$\dfrac{d}{dt}\varphi(t)=-i\int_{-\infty}^{\infty}\log x\ x^{-it}e^{-x}dx$ 。そして、変数変換で

$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\log xdx=\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}e^{-e^{-x}}dx$ がわかるので、その結果

$\Gamma'(1)=-\int_{0}^{\infty} e^{-x}\log xdx=-\int_{-\infty}^{\infty} xdG(x)=-EX$ となる。

不思議なことに、$EX=-\Gamma'(1)$ はオイラーの定数となる。

実際、ガウスの無限積公式

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\quad,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0.-1,-2,\cdots\}\quad,\quad \gamma=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n+1)\right\}$$

において、その対数　$-\log\Gamma(x)=\log x+\gamma x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)-\dfrac{x}{n}\right\}$ をとり、微分して　$-\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\dfrac{1}{x}+\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n(n+x)}$ 　を得るがこの式で $x=1$ とすると

$EX=-\Gamma'(1)=\gamma$ 　となる。

オイラーの定数とゼータ関数の関係を示そう。

補題：　$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\log(n+1)\right\}$ は　　$\gamma=\dfrac{1}{2}\zeta(2)-\dfrac{1}{3}\zeta(3)+\dfrac{1}{4}\zeta(4)-\cdots$

と書ける。ここで、$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ はリーマンゼータ関数である。

証明）テーラー展開　$\log(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\cdots$ において、$x=\dfrac{1}{k}$ とおくと、

$\dfrac{1}{k}-\log(k+1)+\log k=\dfrac{1}{2k^2}-\dfrac{1}{3k^3}+\dfrac{1}{4k^4}-\cdots$ をえるが、k について和をとると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}-\cdots$$

となり、$n\to\infty$ とすれば、目的の結果が得られる。■

ギリス映画『**奇蹟がくれた数式**』に出てくるラマヌジャンはオイラーの定数を

$$\gamma=1-\int_0^1\frac{1+2t}{1+t+t^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}t^{3^k}\right)dt=\log 2-\sum_{l=1}^{\infty}2l\sum_{k=\frac{1}{2}(3^{l-1}+1)}^{\frac{1}{2}(3^l-1)}\frac{1}{(3k)^3-3k}$$

としているし、彼は有名な　notebooks に　$p=\frac{1}{2}n(n+1)$ とおいて

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\log(n(n+1))\approx\gamma+\frac{1}{12p}-\frac{1}{120p^2}+\frac{1}{630p^3}-\frac{1}{1680p^4}$$

を書き記しているそうである。

$\log\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_n\frac{(it)^n}{n!}$ を満たす κ_n は分布のキュムラントと呼ばれる。Gumbell

分布　$G(x)=\exp(-\exp(-x)), x\in\mathbb{R}$ のキュムラントを計算しよう。

一般に $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ であるから、上の無限積の対数をとった式を

$$\log\Gamma(x+1)=\log\Gamma(x)+\log x=-\gamma x-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right\}$$

と書き直し、$\log(1+x)-x=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k}$　の関係を用いると、

$$\log\Gamma(x+1)=-\gamma x+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k}\frac{1}{n^k}=-\gamma x+\sum_{k=2}^{\infty}(-x)^k\frac{\zeta(k)}{k}$$

となり、この式で $x=-it$ とおいて、

$\log\varphi(t)=\log\Gamma(1-it)=\gamma(it)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)}{k}(it)^k$　が得られる。

$\log\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_n\frac{(it)^n}{n!}$　と比較すると次のようになる。

定理　Gumbell 分布 $G(x)=\exp(-\exp(-x))$ のキュムラントは

$$\kappa_1=\frac{1}{2}\zeta(2)-\frac{1}{3}\zeta(3)+\frac{1}{4}\zeta(4)-\cdots \ ,\ \kappa_n=(n-1)!\zeta(n) \quad n\geq 2$$

である。ただし、$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ はリーマンゼータ関数である。

また、$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$ に注意すると $\Gamma(n)=(n-1)!$ であるからキュムラントは次のように積分を用いて表される。

系　Gumbell 分布 $G(x)=\exp(-\exp(-x))$ のキュムラントは

$$\kappa_1=\gamma=\int_0^{\infty}\log x\ e^{-x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x}e^{-e^{-x}}dx \ ,\ \kappa_n=\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{e^x-1}dx \ n\geq 2$$

である。

$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$ を示しておこう。

$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-u}u^{s-1}du$ において、$u=nx$ と変数変換を行うと $\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-nx}(nx)^{s-1}ndx$。

この両辺を n^s でわり $\frac{\Gamma(s)}{n^s}=\int_0^{\infty}e^{-nx}x^{s-1}dx$。そして、$n$ に関して加えると、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(s)}{n^s}=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}x^{s-1}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$$

が得られる。

参照　url
1) https://en.wikipedia.org/wiki/Gumbel_distribution
2) https://youtu.be/jQAPlsNY_P0?list=PL3E4136E122545FBE
Gamma Function - Part 12 - Relation to Zeta Function