Koosis 先生の古典解析８　　　　　　　　　　　pp.34-37

the logarithmic integral

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & x \ge 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\log^- x = \begin{cases} -\log x & 0 \le x < 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする。前回前々回において定理１０と定理１１を証明した。

定理 10　$\mathbb{R}$ 上で定義された非負可測関数 $v(t)$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{1+t^2}\, dt < \infty$$

を満たしているとする。$a \ge 0$ とするとき複素上半平面 $\Im z > 0$ で定義された関数

$$V(z) = a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v(t)\,dt$$

を考える。このとき、$V(z)$ は $\Im z > 0$ で調和関数で非負であり、$\lim_{y\to\infty} \frac{V(iy)}{y} = a$ が成り立つ。さらに $v(t)$ が連続となる点 $t = t_0 \in \mathbb{R}$ では $\lim_{\substack{\Im z \ge 0 \\ z \to t_0}} V(z) = v(t_0)$ が成り立つ。また、次数軸において、$t \to \infty$ とするとき $v(t) = O(|t|)$ が成り立つとすると、閉複素上半平面 $\Im z \ge 0$ においても、$|z| \to \infty$ のとき $V(z) = O(|z|)$ となる。

この定理の逆命題が成立する・・・・・・

定理１１　$v(z)$ *を* $\Im z>0$ *で非負、* $\Im z\geq 0$ *で連続な調和関数とする。*

このとき、ある $0\leq a<\infty$ *が存在して* $v(z)$ *は*

$$v(z)=a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)dt$$

と書ける。このとき、 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{t^2+1}dt<\infty$ *が成り立つ。*

$f(z)$ が解析的なとき、$\log|f(z)|$ は解析関数 $\log f(z)$ の実部であるので調和関数である。$v(z)=\log|f(z)|$ として上の定理が使えそうである。しかしその場合、$v(z)$ は非負でなければならないので $|f|\geq 1$ の条件が要る。$\log^+|f(z)|$ としたらどうか。これは非負ではあるものの劣調和関数である。結局これは定理１１の等式を不等式に変えた次の補題になる。

補題　$f(z)$ を $\Im z\geq 0$ で連続、$\Im z>0$ で解析的な関数で、$\Im z\geq 0$ において $|z|\to\infty$ とするとき、$\log|f(z)|=O(|z|)$ を仮定する。

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^+|f(t)|}{1+t^2}dt<\infty$ のとき、$\Im z>0$ において

$$\log^+|f(z)|\leq a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|dt$$

が成立する。　ただし、$a=\limsup_{y\to\infty}\frac{\log^+|f(iy)|}{y}$

証明）$u(z)=\log^+|f(z)|$ とおくと、この $u(z)$ は $\Im z\geq 0$ で連続、$\Im z>0$ で劣調和関数で $|z|\to\infty$ とするとき $\Im z\geq 0$ において、$|z|\to\infty$ とするとき $O(|z|)$ である。

そこで、$v(z)=a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|dt$ とおけば、この $v(z)$ は定理１０を用いて $\Im z>0$ で調和、$\Im z\ge 0$ で連続である。いま、$x\in\mathbb{R}$ では、$v(x)=\log^+|f(x)|$ と定義すると、すべての実数 x で $\limsup_{\substack{\Im z>0\\ z\to x}} v(z)=v(x)$ が成り立つ。いま、

$w(z)=u(z)-v(z)$ を考える。この関数 $w(z)$ は $\Im z>0$ で劣調和、$\Im z\ge 0$ で連続、$|z|\to\infty$ とするとき $O(|z|)$ である。しかも実数軸では $\limsup_{\substack{\Im z>0\\ z\to x}} w(z)=w(x)$ より $w(x)=0$ でなければならない。さらに

$$\alpha=\limsup_{y\to\infty}\frac{\log^+|w(iy)|}{y}=\limsup_{y\to\infty}\frac{\log^+|f(iy)|}{y}-\limsup_{y\to\infty}\frac{\log^+|v(iy)|}{y}=a-a=0。$$

Phragmen-Lindelof（定理６証明の後を見よ）において $M=0$，$\alpha=0$ とできるので、$\Im z>0$ において、$w(z)\le 0$ が結論される。　$u(z)=\log^+|f(z)|$,

$v(z)=a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|dt$ としていたわけであるから

$w(z)=u(z)-v(z)\le 0$ は　$\log^+|f(z)|\le a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|dt$

を意味している。■

補題では次の定理６をもちいた。

定理６． $w(z)$ *が* $\Im z>0$ *で定義された劣調和関数、すべての* $x\in\mathbb{R}$ *に対して*

$$\limsup_{\substack{\Im z>0\\ z\to x}} w(z)\le M$$

を満たしているとする。このとき、もし、 $w(z)\le C|z|$ *であるなら*

$$w(z)\le M+\alpha\Im z$$

が成り立つ。ここで、 $\alpha=\limsup_{y\to\infty}\dfrac{w(iy)}{y}$

今回示すのは次の定理である。

定理 12. $f(z)$ を $\Im z\ge 0$ で連続、$\Im z>0$ で解析的な関数で、$\Im z\ge 0$ において

$|z|\to\infty$ とするとき、$\log|f(z)|=O(|z|)$ を仮定すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^+|f(t)|}{1+t^2}dt<\infty \ \Rightarrow\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^-|f(t)|}{1+t^2}dt<\infty$$

が成立する。

証明）　$a=\limsup_{y\to\infty}\dfrac{\log^+|f(iy)|}{y}$ とおく。いま、$M\ge 1$ として $f_M(z)=Mf(z)$ とおくと、$a=\limsup_{y\to\infty}\dfrac{\log^+|f_M(iy)|}{y}$ である。補題より

$$\log|f_M(z)|\le\log^+|f_M(z)|\le a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f_M(t)|dt$$ が成り立つ。

実数全体を $I=\left\{t\in\mathbb{R}\,\middle|\,|f(t)|\ge\dfrac{1}{M}\right\}$ および、$II=(-\infty,\infty)\setminus I=\left\{t\in\mathbb{R}\,\middle|\,|f(t)|<\dfrac{1}{M}\right\}$

に分割すると、$t\in I$ で、$\log^+|f_M(t)|=\log|f_M(t)|$ であり $t\in II$ では $\log^+|f_M(t)|=0$、

であるから

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f_M(t)|dt=\frac{1}{\pi}\int_I\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f_M(t)|dt+\frac{1}{\pi}\int_{II}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f_M(t)|dt$$

$=\frac{1}{\pi}\int_I\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log|f_M(t)|dt=\frac{1}{\pi}\int_I\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log|f(t)|dt+\frac{\log M}{\pi}\int_I\frac{\Im z}{|z-t|^2}dt$　より今示した

$\log|f_M(z)|\le a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f_M(t)|dt$　は

$$\log|f(z)|+\log M-\frac{\log M}{\pi}\int_I\frac{\Im z}{|z-t|^2}dt\le a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_I\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log|f(t)|dt$$

と書き直せる。さらに、$\log x=\log^+x-\log^-x$　と $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}dt=1$　という事実を

用いると最後の不等式は

$$\log|f(z)|+\frac{\log M}{\pi}\int_{II}\frac{\Im z}{|z-t|^2}dt\le a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_I\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|dt-\frac{1}{\pi}\int_I\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^-|f(t)|dt$$

となる。$f(z)=0$　となる z　は孤立点をなすので、$f(iy)\ne 0$　となる y　をえらぶ

ことができる。そこで、$f(iy_0)\ne 0$ なる $y_0>0$　を一つ固定する。上の不等式で

$z=iy_0$　とおくと、

$$\log|f(iy_0)|+\frac{\log M}{\pi}\int_{II}\frac{y_0}{y_0^2+t^2}dt\le ay_0+\frac{1}{\pi}\int_I\frac{y_0}{y_0^2+t^2}\log^+|f(t)|dt-\frac{1}{\pi}\int_I\frac{y_0}{y_0^2+t^2}\log^-|f(t)|dt$$

そして、移項して、

$$\frac{1}{\pi}\int_I\frac{y_0}{y_0^2+t^2}\log^-|f(t)|dt+\frac{\log M}{\pi}\int_{II}\frac{y_0}{y_0^2+t^2}dt\le ay_0+\frac{1}{\pi}\int_I\frac{y_0}{y_0^2+t^2}\log^+|f(t)|dt-\log|f(iy_0)|=C$$

をえる。右辺 $C<\infty$ は定数である。　ここで、$t\in I$　では、

$-\log M\le\log|f(t)|=\log^+|f(t)|-\log^-|f(t)|$　より、

$\min\{\log^-|f(t)|,\log M\}=\log^-|f(t)|$

$t \in II$ では、$-\log M \geq \log\left|f(t)\right| = \log^+\left|f(t)\right| - \log^-\left|f(t)\right|$ より、

$\min\left\{\log^-\left|f(t)\right|, \log M\right\} = \log M$ となるので、上の式

$$\frac{1}{\pi}\int_I \frac{y_0}{y_0^2+t^2}\log^-\left|f(t)\right|dt + \frac{\log M}{\pi}\int_{II}\frac{y_0}{y_0^2+t^2}dt \leq C$$

はまとめて、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0}{y_0^2+t^2}\min\left\{\log^-\left|f(t)\right|, \log M\right\}dt \leq C$$

と書けるが、$\lim_{M\nearrow\infty}\min\left\{\log^-\left|f(t)\right|, \log M\right\} = \log^-\left|f(t)\right|$ であるから、単調収束定理より積分の中に M をいれて $M \nearrow \infty$ としてよいので、$M \nearrow \infty$ とすると、

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0}{y_0^2+t^2}\log^-\left|f(t)\right|dt \leq C$ が得られる。そして、$\frac{y_0^2+t^2}{y_0\left(t^2+1\right)}$ が $\mathbb{R}$ 上有界なこと

を用いて、$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^-\left|f(t)\right|}{1+t^2}dt < \infty$ を得る。■

定理１２の結果から次の系を得る。

> 系： $f(z)$ を $\Im z \geq 0$ で連続、$\Im z > 0$ で解析的な関数で、$\Im z \geq 0$ において $|z| \to \infty$ とするとき、$\log\left|f(z)\right| = O(|z|)$ を仮定する。
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^+\left|f(t)\right|}{1+t^2}dt < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\log\left|f(t)\right|\right|}{1+t^2}dt < \infty$$
>
> そして、実軸上の $f(z)$ のゼロ点集合は測度ゼロである。

そしてさらに、

系： $f(z)$ を $\Im z \geq 0$ で連続、$\Im z > 0$ で解析的な関数で、$\Im z \geq 0$ において $|z| \to \infty$ とするとき、$\log|f(z)| = O(|z|)$ ，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|f(t)|}{1+t^2}\,dt < \infty$

を仮定する。そのとき、$a = \displaystyle\limsup_{y\to\infty} \frac{\log^+|f(iy)|}{y}$ とおくと、

$$\log|f(z)| \leq a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log|f(t)|\,dt$$

証明）定理１２の証明の途中に出てきた不等式

$$\log|f(z)| + \frac{\log M}{\pi}\int_{II} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\,dt \leq a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{I} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{I} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^-|f(t)|\,dt$$

で、$M > 1$ とすると左辺は $\log|f(z)|$ より大きく、右辺における $\log^+$ を含む積分の積分範囲は I から $(-\infty,\infty)$ に広げても不等式の向きは変わらないので、

$$\log|f(z)| \leq a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{I} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^-|f(t)|\,dt$$

となる。そして、$I = \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, |f(t)| \geq \frac{1}{M} \right\}$ は $M \nearrow \infty$ とすると $(-\infty,\infty)$ になってしまうので、不等式右辺の $\log^-$ を含む積分の積分範囲は $M \nearrow \infty$ のとき I から $(-\infty,\infty)$ にかわる。結局、$M \nearrow \infty$ として

$$\log|f(z)| \leq a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^-|f(t)|\,dt$$

を得る。これは求める式 $\log|f(z)| \leq a\Im z + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log|f(t)|\,dt$ に他ならない。■