Koosis 先生の古典解析 9　　　　　　pp.38-40

Quasi-analitic　擬解析的

Carleman-Ostrowski の基準

定義：I を空でない開区間、$\{M_n\}$ を正数列、$f(x)\in C^\infty(I)$ とする。
このとき、f に依存する $C>0$ 、$\rho>0$ が存在して

$$\left|f^{(n)}(\lambda)\right|\le C\rho^n M_n,\ \ n=0,1,\cdots\ ,\forall\lambda\in I$$

が成り立つとき $f\in C_I(\{M_n\})$ という記号を使う。

定義：$\forall f\in C_I(\{M_n\})$ に対してある λ_0 が存在して、

$$f^{(n)}(\lambda_0)=0\quad n=0,1,\cdots\quad\Rightarrow\quad f(\lambda)=0\quad\forall\lambda\in I$$

が成立するとき、　$C_I(\{M_n\})$ は quasi analytic といわれる。
（　f が解析的ならこの条件はいつでも満たされている。）

定義　$C_I(\{M_n\})$ において、$r>0$ の関数

$$T(r)=\sup_{n\ge 0}(n\log r-\log M_n)$$

は Ostrowski 基準と呼ばれる。これは　$T(r)\ge-\log M_0$ を満たす
r の増加関数である。

しばらく次の仮定をおく（あとで取り除く）。

仮定 A すべての $n\ge 0$ で $M_n\ge 1$

Ostrowski 基準$T(r)$ の増大速度がかなり速いと quasi analytic となる。

定理 13 $\int_1^\infty \frac{T(r)}{r^2}dr=\infty \Rightarrow C_I(\{M_n\})$ は quasi analytic

証明） $f\in C_I(\{M_n\})$とすると、ある $C>0$ とある$\rho>0$ があって、

すべての$n\geq 0$、すべての$\lambda\in I$ に対して$\left|f^{(n)}(\lambda)\right|\leq C\rho^n M_n$ が成り立つ。

ある$\lambda_0\in I$ が存在して、 $f^{(n)}(\lambda_0)=0$ $n=0,1,\cdots$ とせよ。λ_0 がある有限区間 $J\subseteq I$ の端点になっている場合、$f(\lambda)=0$, $\lambda\in J$ を示せば、そのようなJ を I の中でうごかしていけばI に含まれるλ 全体で$f(\lambda)=0$となる。さらに、$\lambda\to a\lambda+b, a\neq 0$ なる変換を行うことによって、$J=[0,1]$,$\lambda_0=1$ として一般性を失わない。すなわち、$f^{(n)}(1)=0$ $n=0,1,\cdots$とおき、 $f(\lambda)=0$，$\lambda\in[0,1]$を示す。$\Re z>-1$ なる半平面で、$F(z)=\int_0^1 \lambda^z f(\lambda)d\lambda$ とおく。この積分が絶対収束していることから$F(z)$ は$\Re z>-1$という半平面で解析的である。また、

$\left|f(\lambda)\right|\leq CM_0$ より$\left|F(iy)\right|\leq\int_0^1\left|f(\lambda)\right|d\lambda\leq CM_0$であるから、$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^+\left|F(iy)\right|}{1+y^2}dy<\infty$

となる 。いま、$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^-\left|F(iy)\right|}{1+y^2}dy=\infty$がいえたとしよう。これは、定理１２に矛盾してしまう。

ところで、定理１２とは

定理 12. $f(z)$ を恒等的にはゼロでない関数で $\Im z \geq 0$ で連続、$\Im z > 0$ で解析的な関数で、$\Im z \geq 0$ において $|z| \to \infty$ とするとき、$\log|f(z)| = O(|z|)$ を仮定すると $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|f(t)|}{1+t^2} dt < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^-|f(t)|}{1+t^2} dt < \infty$

この黄色で書かれた仮定は重要で、定理１２の証明を読み直すと“$f(z)=0$ となる z は孤立点をなすので、$f(iy)\neq 0$ となる y をえらぶことができる。そこで、$f(iy_0)\neq 0$ なる $y_0 > 0$ を一つ固定する。”というくだりで黄色の仮定を使っていた。すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|F(iy)|}{1+y^2} dy < \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^-|F(iy)|}{1+y^2} dy = \infty \Rightarrow F(z) = 0 \quad \Im z \geq 0$$

で成り立たねばならないことになる。そして、$F(z)$ は $\Re z > -1$ という半平面で解析的であったからさらに広い範囲 $\Im z > -1$ で、$F(z)=0$ が結論される。とくに $F(k) = \int_0^1 \lambda^k f(\lambda) d\lambda = 0$、$k \geq 0$ となっている。このことから任意の多項式 $p(\lambda)$ について、$\int_0^1 p(\lambda) f(\lambda) d\lambda = 0$ となる。閉区間で連続な関数は多項式で一様近似されるというワイエルストラスの多項式近似の定理により、。

$p(\lambda) \to f(\lambda)$ としてやると $\int_0^1 f^2(\lambda) d\lambda = 0$ が言えて、$f(\lambda) = 0$ a.e.となる。$f(\lambda)$ の連続性から $f(\lambda) = 0$,$\forall \lambda \in [0,1]$ が結論される。すなわち定理１３の証明を完

結するためには、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^{-}\left|F(iy)\right|}{1+y^2}dy=\infty$ を示せばよいことがわかった。部分積分と $f^{(n)}(1)=0\quad n=0,1,\cdots$ の仮定を使うと、

$$F(iy)=\int_0^1\lambda^{iy}f(\lambda)d\lambda=\frac{\lambda^{iy+1}}{iy+1}f(\lambda)\Big|_0^1-\frac{1}{iy+1}\int_0^1\lambda^{iy+1}f'(\lambda)d\lambda=-\frac{1}{iy+1}\int_0^1\lambda^{iy+1}f'(\lambda)d\lambda$$

これをくりかえすことにより、$F(iy)=\dfrac{(-1)^n}{(iy+1)\cdots(iy+n)}\displaystyle\int_0^1\lambda^{iy+n}f^{(n)}(\lambda)d\lambda$ が得られる。そこで、$y\neq 0$ のとき、$\left|F(iy)\right|\leq\dfrac{1}{|y|^n}\displaystyle\int_0^1\left|f^{(n)}(\lambda)\right|d\lambda\leq C\left(\dfrac{\rho}{|y|}\right)^n M_n$ を得る。対数をとると、$\log\left|F(iy)\right|\leq\log C-\left(n\log\dfrac{|y|}{\rho}-\log M_n\right)$ となる。左辺は n に無関係であるから　$\log\left|F(iy)\right|\leq\log C-T\left(\dfrac{|y|}{\rho}\right)$ が得られる。両辺を $1+y^2$ で割り積分すると　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\left|F(iy)\right|}{1+y^2}dy\leq\pi\log C-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T\left(|y|/\rho\right)}{1+y^2}dy$ を得る。ところが定理の仮定は、

$\displaystyle\int_{\rho}^{\infty}\frac{T\left(|y|/\rho\right)}{y^2}dy=\frac{1}{\rho}\int_1^{\infty}\frac{T(r)}{r^2}dr=\infty$ を意味し、$T(r)\geq-\log M_0$ から

$\displaystyle\int_{|y|\leq\rho}\frac{T\left(|y|/\rho\right)}{1+y^2}dy\geq-\pi\log M_0$ であるから　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\left|F(iy)\right|}{1+y^2}dy\leq\pi\log C-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T\left(|y|/\rho\right)}{1+y^2}dy$ の右辺は $-\infty$ となり、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\left|F(iy)\right|}{1+y^2}dy=-\infty$ となる。$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^{+}\left|F(iy)\right|}{1+y^2}dy<\infty$ であったことから $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^{-}\left|F(iy)\right|}{1+y^2}dy=\infty$ でなければならない。証明終わり■