Koosis 先生の古典解析学５　p.20~p.24

定理８　Paley-Wiener の定理

実軸上で$L^2(\mathbb{R})$ に属する指数型整関数は、$f(z)=\int_{-a}^{b} e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\,d\lambda$ という形をしている。ただし、$a=\limsup_{y\to\infty}\frac{\log|f(iy)|}{y}$,　　$b=\limsup_{y\to-\infty}\frac{\log|f(iy)|}{|y|}$

$\varphi\in L^1(-a,b)$

証明）$g(z)=e^{imz}f(z)$　,$m=\frac{b-a}{2}$ とおく。そして、$g(z)=\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i\lambda x}\psi(\lambda)\,d\lambda$,

$\alpha=\limsup_{y\to\infty}\frac{\log|g(iy)|}{y}=\limsup_{y\to-\infty}\frac{\log|g(iy)|}{|y|}$, $\psi\in L^1(-\alpha,\alpha)$を示す。その結果

$f(z)=e^{-imz}g(z)=\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i(\lambda-m)z}\psi(\lambda)d\lambda=\int_{-\alpha-m}^{\alpha-m} e^{i\lambda z}\psi(\lambda+m)d\lambda$ となるが、

$\alpha=\limsup_{y\to-\infty}\frac{\log|g(iy)|}{|y|}=\limsup_{y\to-\infty}\frac{\log|f(iy)|-my}{-y}=b+m$ より、$\alpha-m=b$

$\alpha=\limsup_{y\to\infty}\frac{\log|g(iy)|}{y}=\limsup_{y\to\infty}\frac{\log|f(iy)|-my}{y}=a-m$ より、$-(\alpha+m)=-a$

となり、$\psi(\lambda+m)=\varphi(\lambda)$ とおけば

$$f(z)=e^{-imz}g(z)=\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i(\lambda-m)z}\psi(\lambda)d\lambda=\int_{-\alpha-m}^{\alpha-m} e^{i\lambda z}\psi(\lambda+m)d\lambda=\int_{-a}^{b} e^{i\lambda z}\varphi(\lambda)d\lambda$$

が示される。つまり、定理８の代わりに$a=b$ とおいたつぎに述べる定理８’を証明すればよいことがわかった。■
定理８’を証明しよう。

定理８’ 実軸上で$L^2(\mathbb{R})$ に属する指数型整関数は、$f(z)=\int_{-a}^{a} e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\,d\lambda$ という形をしている。ただし、$a=\limsup_{y\to\infty}\frac{\log|f(iy)|}{y}=\limsup_{y\to-\infty}\frac{\log|f(iy)|}{-y}$,

$\varphi\in L^1(-a,a)$

証明）指数型という仮定により、ある定数$C>0$ と$A>0$ があり、

$|f(z)|\le Ce^{A|z|}$ が成り立つ。いま、$h>0$ に対して

$f_h(z)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(z+t)dt$ と定義すると、f_h は以下の６つの性質を持っている。

1．f_h は整関数である。

２. 各$h>0$に対して、$C_h<\infty$ があり $|f_h(z)|\le C_h e^{A|z|}$を満たす。A は$|f(z)|\le Ce^{A|z|}$と同じものである。

３．各$h>0$に対して、$M_h<\infty$があり、実軸$\mathbb{R}$ で $|f_h(x)|\le M_h$を満たす

４．$\lim_{x\to\pm\infty} f_h(x)=0$

５．$f_h(x)\in L^2(\mathbb{R})$

６．$\lim_{h\to 0}\|f_h(x)-f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}=0$

$$\varphi_h(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\underset{R\to\infty}{l.i.m}\int_{-R}^{R} e^{-i\lambda x} f_h(x)\,dx$$

$$\varphi(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\underset{R\to\infty}{l.i.m}\int_{-R}^{R} e^{-i\lambda x} f(x)\,dx$$

とおく（ここで、$l.i.m$ は$L^2(\mathbb{R})$ の距離での極限、すなわち、$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,a_n=a$ は

$\lim_{n\to\infty}\|a_n-a\|_{L^2(\mathbb{R})}=0$の意味 ）。 f_h-f は$\varphi_h-\varphi$ の$L^2(\mathbb{R})$における

フーリエ変換であり、プランシュレルの定理　から$\sqrt{2\pi}\|\varphi_h-\varphi\|_2=\|f_h-f\|_2$である

るが、性質６を用いて$\lim_{h\to 0}\|\varphi_h-\varphi\|_2=0$が導かれる。次に、$\lambda\notin[-A,A]$　で

$\varphi_h(\lambda)=0,\ a.e.$が成立することを示す。$f_h(z)$が持つ性質１，２，３と定理６系

より、$|f_h(z)|\le M_h\ e^{A|\Im z|}$である。また、性質１，２，３，４と定理７により、$L>0$

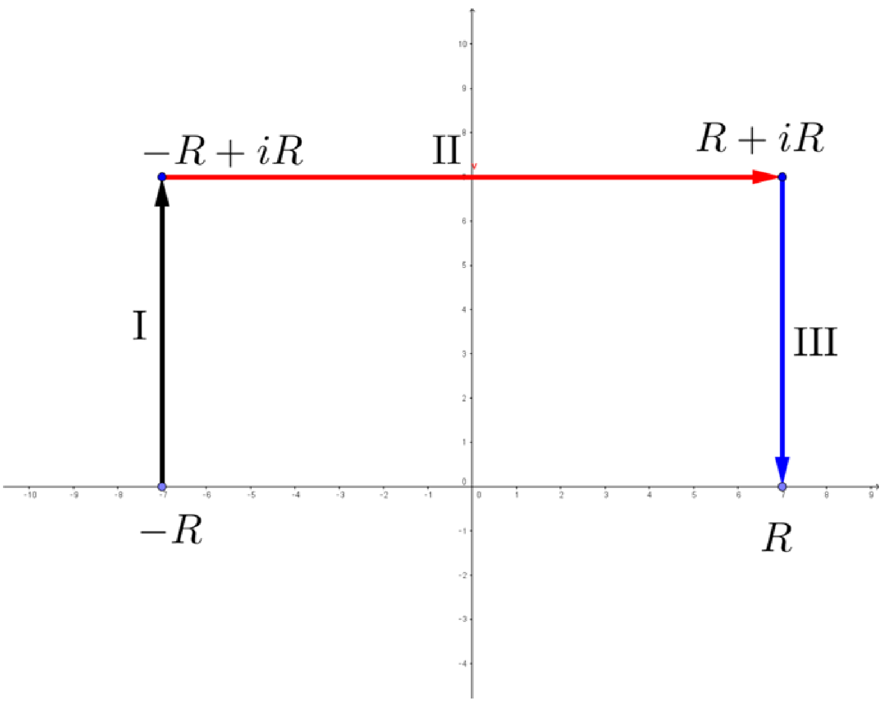
を任意に固定して、$\lim_{x\to\pm\infty} f_h(x+iy)=0$が$|\Im z|\le L$　で一様に成り立つ。$-\infty<\lambda<-A$

とする。部分列をとればl.i.m　はlim a.eに変わるので∞に行く部分列$\{R_k\}$　で

$\varphi_h(\lambda)=\dfrac{1}{2\pi}\lim_{k\to\infty}\int_{-R_k}^{R_k} e^{-i\lambda x} f_h(x)\,dx,\ a.e.$とするものが存在する。$\varepsilon>0$を任意に固定し、

$\eta=-(A+\lambda)>0$　とおく。下図　のように矢印で示される道I,II,III　を考え

$\Gamma_R=I\cup II\cup III$とする。



コーシの積分定理より、$\displaystyle\int_{-R}^{R} e^{-i\lambda x} f_h(x)dx=\int_I+\int_{II}+\int_{III} e^{-i\lambda z} f_h(z)dz$

と書ける。$\left|f_h(z)\right| \le M_h\ e^{A|\Im z|}$ より、R を十分大きくして

$$\left|\int_{II} e^{-i\lambda z} f_h(z)\,dz\right| = \left|\int_{-R}^{R} e^{-i\lambda(x+iR)} f_h(x+iR)\,dx\right| \le e^{\lambda R} M_h e^{AR} = M_h e^{-\eta R} \le \varepsilon$$

となるようにしておく。つぎに、$z \in I$ では、$z = -R + iy, 0 \le y \le R$ であるので、積分は

$\displaystyle\int_I e^{-i\lambda z} f_h(z)\,dz = i\int_0^R e^{-i\lambda(-R+iy)} f_h(-R+iy)\,dy$ と書けるが、$0 \le y \le R$ の区間を

$[0,R] = [0,L] \cup (L,R]$ と２つの区間に分割し、$\displaystyle\int_0^R e^{-i\lambda(-R+iy)} f_h(-R+iy)\,dy = \int_0^L + \int_L^R$ と

してそれぞれの積分を評価する。ただし、L を十分大きくして、$\dfrac{M_h e^{-\eta L}}{\eta} \le \varepsilon$ となるようにしておく。この場合 $R > L$ であるように R をとる。つまり、先ほど上で決めた $M_h e^{-\eta R} \le \varepsilon$ をみたす R は $R > L$ となるようにさらに大きくしなければならないかもしれない。しかし、そのようにかえても $M_h e^{-\eta R} \le \varepsilon$ を満たしたまま $\dfrac{M_h e^{-\eta L}}{\eta} \le \varepsilon$ となる。$\eta = -(\lambda + A) > 0$ であったので

$\left|e^{-i\lambda(-R+iy)} f_h(-R+iy)\right| \le e^{\lambda y} M_h e^{Ay} = M_h e^{-\eta y}$ が言える。この評価は $(L,R]$ 上の積分評価に使う。すなわち、被積分関数にこの不等式を適用して $\dfrac{M_h e^{-\eta L}}{\eta} \le \varepsilon$ を使うと

$\displaystyle\left|\int_L^R e^{-i\lambda(-R+iy)} f_h(-R+iy)\,dy\right| \le M_h \int_L^R e^{-\eta y}\,dy = \frac{M_h\left(e^{-\eta L} - e^{-\eta R}\right)}{\eta} \le \varepsilon$。そして、

$\displaystyle\left|\int_0^L e^{-i\lambda(-R+iy)} f_h(-R+iy)\,dy\right| \le e^{|\lambda|L} L \sup_{0 \le y \le L}\left|f_h(-R+iy)\right|$ という不等式において、性質４より従う定理７：「$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f_h(x+iy) = 0$ が $|\Im z| \le L$ で一様に成り立つ」を使うと R を十分大きくして $\displaystyle e^{|\lambda|L} L \sup_{0 \le y \le L}\left|f_h(-R+iy)\right| \le \varepsilon$ となるようにできる。うえでも R を決

めたが、上での結果を変えずにさらにR を十分大きくしておけばよい。結局、$\int_0^R e^{-i\lambda(-R+iy)} f_h(-R+iy)\,dy = \int_0^L + \int_L^R$ において$\left|\int_0^L \right| \le \varepsilon$, $\left|\int_L^R \right| \le \varepsilon$ となった。つまり、

R を十分大きくとることにより、$\left|\int_I e^{-i\lambda z} f_h(z)\,dz\right| \le 2\varepsilon$ とできた。III における積分評価もまったく同じようにしてR を十分大きくとることにより、

$\left|\int_{III} e^{-i\lambda z} f_h(z)\,dz\right| \le 2\varepsilon$ を得る。結局、$\int_{-R}^R e^{-i\lambda x} f_h(x)\,dx = \int_I + \int_{II} + \int_{III} e^{-i\lambda z} f_h(z)\,dz$ において、

$\left|\int_{-R}^R e^{-i\lambda x} f_h(x) dx\right| \le 5\varepsilon$ という評価を得た。しかしこのことは、ε をいくらでも小さくとれるので $\lim_{R\to\infty}\left|\int_{-R}^R e^{-i\lambda x} f_h(x)\,dx\right| = 0$ を言ったことになる。ここまで行ってきた

議論を$\Gamma_R = I \cup II \cup III$ のかわりに、x 軸で対称に下半平面に折り返して

contour $\Gamma_R = I' \cup II' \cup III'$ として、$I' = [-R, -R-iR]$,$I'' = [-R-iR, R-iR]$,

$I''' = [R-iR, R]$ とすると、今度は $\lambda > A$ では、$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{-R}^R e^{-i\lambda x} f_h(x)\,dx\right| = 0$ がいえる。

つまり、以上まとめれば、$\lambda \notin [-A.A]$ において$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{-R}^R e^{-i\lambda x} f_h(x)\,dx\right| = 0$ がいえた。

$\varphi_h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \underset{R\to\infty}{l.i.m} \int_{-R}^R e^{-i\lambda x} f_h(x)\,dx$ であったから、$\varphi_h(\lambda) = 0, \lambda \notin [-A.A], a.e.$ となった。

フーリエ逆変換 $f_h(x) = \underset{R\to\infty}{l.i.m} \int_{-R}^R \varphi_h(\lambda) e^{i\lambda x}\,d\lambda$ は、$R > A$ では 0 を積分することになるので、結局 $f_h(x) = \int_{-A}^A \varphi_h(\lambda) e^{i\lambda x}\,d\lambda$ という形になり、$h \to 0$ として

$f(x) = \int_{-A}^A \varphi(\lambda) e^{i\lambda x}\,d\lambda$ が言える。ただし、ここでの収束は$L^2(\mathbb{R})$ の距離でとらな

ければならないので、 $f(x)=\int_{-A}^{A}\varphi(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$, $a.e.$ としなくてはいけない。

$\varphi\in L^2(\mathbb{R})$だが、シュワルツの不等式を使って

$\int_{-A}^{A}|\varphi|d\lambda\le\sqrt{2A\int_{-A}^{A}|\varphi|^2d\lambda}\le\sqrt{2A\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi|^2d\lambda}$ であるから、$\varphi\in L^1[-A,A]$である。という

ことは、$F(z)=\int_{-A}^{A}\varphi(\lambda)e^{i\lambda z}\,d\lambda$ は$\mathbb{C}$ 全体で定義された整関数となる。実軸で

$F(x)=f(x),a.e.$ であるわけであるから、解析関数の一致の定理から

$F(z)=f(z)$ すなわち $f(z)=\int_{-A}^{A}\varphi(\lambda)e^{i\lambda z}\,d\lambda$ がすべての $z\in\mathbb{C}$ でいえる。定理の

結論は積分区間が$[-A,A]$ ではなくもっと正確に$[-a,a]$ であることをいわなければならない。しかし、ここで前回 Koosis 先生古典解析４の定理６の系をみると

> 定理６の系
>
> $f(z)$ を $\Im z\ge 0$ で連続、$\Im z>0$ で解析的な関数とする。さらに
>
> $\Im z\ge 0$ において指数型 $|f(z)|\le Ce^{A|z|}$ で
>
> 実数軸上で有界すなわち$|f(x)|\le M$,$x\in\mathbb{R}$ とすると、上半平面$\Im z\ge 0$ で
>
> $|f(z)|\le Me^{a\,\Im z}$, $a=\limsup_{y\to\infty}\frac{\log|f(iy)|}{y}$ という不等式が成り立つ。

となっている。実数 x については $f(x)=\int_{-A}^{A}\varphi(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$ と書けている。Fourier 変換論の Riemann-Lebesgue の補題により $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ となるので、ある M が存在して$|f(x)|\le M$ とおけ定理６の系が適用できる。さらに、この定理６の系は上半平面$\Im z\ge 0$ におけるものだが、証明を変えることなく下半平面でも

$a=\limsup_{y\to-\infty}\frac{\log\left|f(iy)\right|}{-y}$ として成り立つ。つまり、A は a と置き換えることができ証明が完了した。∎

じつは、定理８’の証明において次の事実を暗黙で用いた。

f を実軸で $L^2(\mathbb{R})$ の指数型整関数として $f_h(z)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(z+t)\,dt$ と定義すると、

f_h は以下の６つの性質を持っている。

1．f_h は整関数である。

２. 各 $h>0$ に対して、$C_h<\infty$ があり $\left|f_h(z)\right|\le C_h e^{A|z|}$ を満たす。A は $\left|f(z)\right|\le Ce^{A|z|}$ と同じものである。

３．各 $h>0$ に対して、$M_h<\infty$ があり、実軸 $\mathbb{R}$ で $\left|f_h(x)\right|\le M_h$ を満たす

４．$\lim_{x\to\pm\infty} f_h(x)=0$

５．$f_h(x)\in L^2(\mathbb{R})$

６．$\lim_{h\to0}\left\|f_h(x)-f(x)\right\|_2=0$

１, 2 は明らかだろう。また３は、４からでる。次に $f_h=f+(f_h-f)$ とかいて、

$\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R})}\le\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|f_h-f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ という３角不等式の右辺第２項は性質６より有界、右辺第一項は $f\in L^2(\mathbb{R})$ であるから有界。つまり、$6\Rightarrow5$ 。

$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\,dt=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(u)\,du$ と書き直せるが、シュワルツの不等式から、

$\left|\int_{x-h}^{x+h} f(u)\,du\right| \le 2h\sqrt{\int_{x-h}^{x+h}\left|f(u)\right|^2 du}$ であり、 $f\in L^2(\mathbb{R})$ より $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\int_{x-h}^{x+h}\left|f(u)\right|^2 du}=0$ となるので、性質４は OK。やはり Schwartz の不等式で

$$\left\|f_h(x)-f(x)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(f(x+t)-f(x)\right)dt\right|^2 dx\le\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+t)-f(x)\right|^2 dxdt$$

がわかる。したがって、$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+h)-f(x)\right|^2 dx=0$ を示せば性質６の証明がおわる。ここで、プランシュレルの定理を引用する。

> $u\in L^2(\mathbb{R})$ のフーリエ変換を $\hat{u}(\lambda)=\underset{A\to\infty}{l.i.m}\int_{-A}^{A}u(x)e^{ix\lambda}dx$ と定義すると
>
> $\hat{u}\in L^2(\mathbb{R})$ であり、$\left\|\hat{u}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2=2\pi\left\|u\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ が成立する。

そこで、$\hat{u}(\lambda)=\underset{A\to\infty}{l.i.m}\int_{-A}^{A}f(x)e^{ix\lambda}dx$ とすると $e^{-i\lambda h}\hat{u}(\lambda)=\underset{A\to\infty}{l.i.m}\int_{-A}^{A}f(x+h)e^{ix\lambda}dx$ となるので、$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+h)-f(x)\right|^2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-i\lambda h}-1\right|^2\left|u(x)\right|^2 dx$ がいえる。しかし、

$\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-i\lambda h}-1\right|^2\left|u(x)\right|^2 dx\le 4\int_{-\infty}^{\infty}\left|u(x)\right|^2 dx$ よりルベッグの収束定理を用いて積分と lim の交換をして　$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-i\lambda h}-1\right|^2\left|u(x)\right|^2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0}\left|e^{-i\lambda h}-1\right|^2\left|u(x)\right|^2 dx=0$ となる。これで６の証明は終わる。

もっと簡単な証明方法があるかもしれない。