ポアソン公式 Poisson formula への準備

定理 10 $\mathbb{R}$ 上で定義された非負可測関数を $v(t)$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{1+t^2}\,dt<\infty$$

を満たしているとする。$a\geq 0$ とするとき複素数 z についての $\Im z>0$ で定義された関数

$$V(z)=a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)\,dt$$

を考える。このとき、$V(z)$ は $\Im z>0$ で調和関数で非負であり、さらに $\lim_{y\to\infty}\frac{V(iy)}{y}=a$ が成り立つ。さらに $v(t)$ が連続となる点 $t_0\in\mathbb{R}$ では $\lim_{\substack{\Im z\geq 0\\ z\to t_0}}V(z)=v(t_0)$ が成り立つ。さらに、$t\to\infty$ のとき $v(t)=O(|t|)$ とすると、$\Im z\geq 0$ においても、$|z|\to\infty$ のとき $V(z)=O(|z|)$ となる。

注意事項）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{1+t^2}\,dt<\infty$ という仮定は積分の存在 $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)\,dt<\infty$ を保障している。また、$v(t)=1$ とおき、$z=x+iy$ とあらわすと

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt=1$ であり、$\Im z\to 0$ で $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}dt\to 0$ とはならないし、$\Im z\to 0$ のとき $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)\,dt\to 0$ と短絡的に考えてはならないことを注意しておこう。$V(z)$ は調和関数で、複素平面の上半平面の各点 z で定義され、$z\to t$ と上半分平面の境界、実軸上の点 t で $v(t)$ となる。つまり、$v(t)$ は $V(z)$ の境界値になっている。この場合、境界での条件 $v(t)=O(|t|)$ から

$V(z)=O(|z|)$が結論されるということは、上半平面での挙動が境界値の挙動に支配されてしまうというすごいことを言っているのである。
この定理の逆命題が有名なポアソン公式（定理１１）となる。

証明）$t\in\mathbb{R}$　$\Im z>0$において$\dfrac{1}{t-z}$は解析関数であるので、その虚数部分

$\Im\left(\dfrac{1}{t-z}\right)=\Im\left(\dfrac{1}{t-x-iy}\right)=\Im\left(\dfrac{t-x+iy}{(t-x)^2+y^2}\right)=\dfrac{y}{(t-x)^2+y^2}$　は、コーシー・リーマンの関係式から調和関数であることがわかる。また、$v(t)\geq 0$ であるので$\Im z\geq 0$では$V(z)=a\Im z+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)\,dt\geq 0$である。この式に$z=iy$ を代入すると

$V(iy)=ay+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{y}{t^2+y^2}v(t)\,dt$　となり両辺をy で割ると

$\dfrac{V(iy)}{y}=a+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{t^2+y^2}v(t)\,dt$を得る。$y\geq 1$ では$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{t^2+y^2}v(t)\,dt\leq\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{t^2+1}v(t)\,dt$であるので、右辺第２項に、ルベッグの収束定理（dominated convergence 積分と lim の交換ができる）が使えて$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{t^2+y^2}v(t)\,dt=0$となり、

$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\dfrac{V(iy)}{y}=a$がいえる。つぎに、$v(t)$ が$t_0\in\mathbb{R}$ で連続とする。$t\to\pm\infty$ で１に近い$\dfrac{t^2+1}{(t-t_0)^2+1}$ は、$\mathbb{R}$ 上で有界となり、それを$\dfrac{t^2+1}{(t-t_0)^2+1}\leq M$ と表すと

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{v(t)}{(t-t_0)^2+1}dt\leq\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{t^2+1}{(t-t_0)^2+1}\dfrac{v(t)}{1+t^2}dt\leq M\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{v(t)}{1+t^2}dt<\infty$となる。いまこの式で、

$u=t+t_0$ と変数変換すると$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{v(u+t_0)}{1+u^2}du<\infty$となる。これは定理の仮定

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{v(t)}{1+t^2}dt<\infty$が$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{v(u+t_0)}{1+u^2}du<\infty$に置き換えられることすなわち、いいなおせば、$v(t)$ を$v(t+t_0)$ と置きなおすことで、いつでも$\displaystyle\lim_{|z|\to 0}a\Im z=0$ であるから定理

を証明するには、$v(t)$ が$t=0$ で連続なとき$\lim_{\substack{\Im z\geq 0\\ |z|\to 0}}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)dt=v(0)$を示せばよいことがわかる。$v(t)$ は$t=0$ で連続となるので、任意の$\varepsilon>0$ に対してあるδ が存在して、$|t|<2\delta$ において、$|v(t)-v(0)|<\varepsilon$ となる。$|z|\to 0$ の極限を考えたいわけだから$|z|\leq\delta$と仮定しても問題はない。積分の範囲を$\{t;|t|\leq 2\delta\}$ と$\{t;|t|>2\delta\}$に分けそれぞれの範囲での積分を、I,II とする。まずIIは$|t|>2\delta$ すなわち$\frac{|t|}{2}\geq\delta$ をみたし$|t-z|\geq|t|-|z|\geq|t|-\delta\geq|t|-\frac{|t|}{2}=\frac{|t|}{2}$となるので

$II=\frac{1}{\pi}\int_{|t|>2\delta}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)dt\leq\frac{4y}{\pi}\int_{|t|>2\delta}\frac{v(t)}{t^2}dt$ が言える。$\frac{t^2+1}{t^2}=1+\frac{1}{t^2}\leq 1+\frac{1}{4\delta^2}$ であるから、$\int_{|t|>2\delta}\frac{v(t)}{t^2}dt\leq\left(1+\frac{1}{4\delta^2}\right)\int_{|t|>2\delta}\frac{v(t)}{t^2+1}dt\leq\left(1+\frac{1}{4\delta^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{t^2+1}dt$。

$II\leq\frac{4y}{\pi}\int_{|t|>2\delta}\frac{v(t)}{t^2}dt\leq\frac{4y}{\pi}\left(1+\frac{1}{4\delta^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{1+t^2}$ より、$|z|\to 0$のとき$y\to 0$ であるので、

$II\to 0$ がいえる。次にI について考えよう。$|t|<2\delta$ において、$|v(t)-v(0)|<\varepsilon$であったから$v(0)-\varepsilon\leq v(t)\leq v(0)+\varepsilon$ がなりたち、これを積分

$I=\frac{1}{\pi}\int_{-2\delta}^{2\delta}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}v(t)dt$に代入することにより

$\frac{v(0)-\varepsilon}{\pi}\int_{-2\delta}^{2\delta}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt\leq I\leq\frac{v(0)+\varepsilon}{\pi}\int_{-2\delta}^{2\delta}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$を得る。

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-2\delta}^{2\delta}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-x-2\delta}^{-x+2\delta}\frac{y}{u^2+y^2}du=\frac{1}{\pi}\left\{\arctan\frac{-x+2\delta}{y}-\arctan\frac{-x-2\delta}{y}\right\}$において、

$|x|\le|z|\le\delta$ より、$-x+2\delta>0$、 $-x-2\delta<0$を考慮すると、

$\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-2\delta}^{2\delta}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt=1$であることがわかる。そして、

$\displaystyle\frac{v(0)-\varepsilon}{\pi}\int_{-2\delta}^{2\delta}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt\le I\le\frac{v(0)+\varepsilon}{\pi}\int_{-2\delta}^{2\delta}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$ において $y\to 0$ とする

と $\displaystyle v(0)-\varepsilon\le\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-2\delta}^{2\delta}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}v(t)dt\le v(0)+\varepsilon$ を得る。ε はいくらでも小さく

できるので、 $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-2\delta}^{2\delta}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}v(t)dt=v(0)$ でなければならない。すでに上で

得られた結果とあわせると $\displaystyle\lim_{\substack{\Im z\ge 0\\ |z|\to 0}}V(z)=v(0)$ が言えたことになる。

定理の後半部分の証明をしよう。$\displaystyle V(z)=a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)dt$ において、$R=|z|$

とおけば、$a\Im z=O(R)$ であるから、結局のところ $t\to\infty$ のとき $v(t)=O(|t|)$ であ

るという仮定から $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}v(t)dt=O(R)$ を示せばよい

わけである。そこでまた前半の証明と同じような方法をとる。積分範囲を

$\{t;|t|<2R\}$ と $\{t;|t|\ge 2R\}$ に分けそれぞれを I,II とおく。$v(t)=O(|t|)$ であるから、

$|t|<2R$ では、ある M を見つけて $v(t)\le \mathrm{MR}$ とできる。 そうして、

$\displaystyle I=\frac{1}{\pi}\int_{-2R}^{2R}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}v(t)dt\le MR$ となり、$R\to\infty$ で $I=O(R)$ が言える。次に $|t|\ge 2R$

とすると $R=|z|$ とおいたので、$|t-z|\ge|t|-|z|=|t|-R\ge\frac{|t|}{2}$ を再び得て

$$II=\frac{1}{\pi}\int_{|t|>2R}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}v(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{|t|>2R}\frac{y}{|t-z|^2}v(t)\,dt\le\frac{4y}{\pi}\int_{|t|>2R}\frac{v(t)}{t^2}dt=o(R)$$ を得る。

ここで、$\int_{|t|\ge2R}\frac{v(t)}{t^2}dt\le\int_{|t|\ge2R}\frac{v(t)}{1+t^2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\le\left(1+\frac{1}{4R^2}\right)\int_{|t|\ge2R}\frac{v(t)}{1+t^2}dt$ を用いた。

これらを合わせると $V(z)=O(R)$ となり証明が完結した。■

Wikipedia　ランダウの記号　より、

十分大きいすべての実数 x に対し定義されている実数値関数 $f(x),g(x)$ に対し、

$$f(x)=O(g(x))\quad \text{as } x\to\infty$$

を

$$^\exists x_0,{}^\exists M>0\quad \text{s.t.}\quad x>x_0\Rightarrow|f(x)|<M|g(x)|$$

と定義し、「$f(x)$ が $x\to\infty$ のとき オーダー$O(g(x))$ である」と呼ぶ。

また $f(x)=o(g(x))$ $(x\to\infty)$ は $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=0$ を意味する。