Koosis 先生の古典解析 7　　　　　　pp.30-32

$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x$　であるから　$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi$。そしてこれから、$y>0$ の時

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{t^2+y^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}dt = \pi$ がわかる。したがって、$z=x+iy$ と

すると　$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt = 1$ である。言い直せば、$\frac{1}{\pi}\frac{\Im z}{|z-t|^2}$ は z

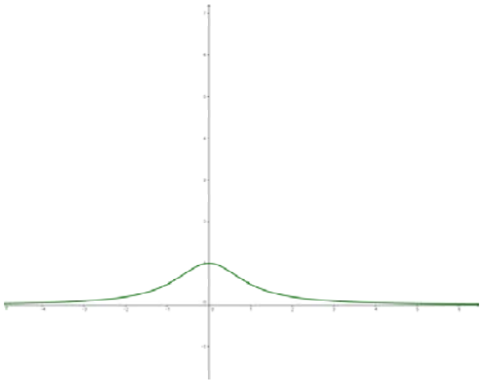
を固定するごとに、非負で積分すると１になっている確率密度関数（ポアソン核と呼ばれるものだが）になっており $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)\,dt$ は $v(t)$ をこの確率密度で平均したものと言える。この平均値は $y\to 0$ のとき

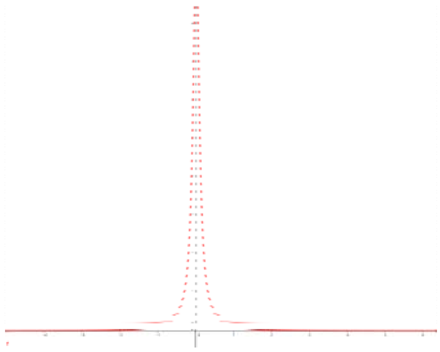
$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}v(t) \to v(x)$ が示される。つまり平均した値は

$y\to 0$ とすると中心 $t=x$ における値に近づき、$x\neq t$ では $y\to 0$ で

$\frac{1}{\pi}\frac{\Im z}{|z-t|^2} = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-t)^2+y^2} \to 0$ となっている。つまり、この確率密度は $y\to 0$ で一点 $x=t$ 以外では０に収束する一方で、$x=t$ では限りなく大となりそして平均値はその点でのみ生き残る。この事実が示していることは、$y\to 0$ でポアソン核がディラックの超関数 $\delta(\cdot)$ に近づいて行っているものと考えられる。ここでディラックの超関数とは $\delta(x)=0, x\neq 0$ ， $\delta(0)=\infty$ ， $\int \delta(x-t)v(t)\,dt = v(x)$ をみたし、最後の式で $v(t)\equiv 1$ とおくと、$\int \delta(t)dt = 1$ である。ポアソン核 $\frac{1}{\pi}\frac{\Im z}{|z-t|^2}$ のグラフは　$y=1.0$ とすると のとき下図左　$y=0.1$ のとき下図右のようになる。つまり、y が小さくなればなるほど中央の値に集中していく様子がわかる。ディラックの超関数はポアソン核において $y\to 0$ とした結果を表していると考え

られる。ただし、$\delta(x)=0, x\neq 0$、$\int\delta(t)dt=1$ なるものは線形汎関数としてのみ意味を持ち普通の関数としては実現できないことに注意しておこう。





我々はすでにつぎに上げる定理の証明を見てきた。

定理 10　$\mathbb{R}$ 上で定義された非負可測関数を $v(t)$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{1+t^2}\,dt<\infty$$

を満たしているとする。$a\geq 0$ とするとき複素数 z についての $\Im z>0$ で定義された関数

$$V(z)=a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)\,dt$$

を考える。このとき、$V(z)$ は $\Im z>0$ で調和関数で非負であり、さらに

$\lim_{y\to\infty}\frac{V(iy)}{y}=a$ が成り立つ。さらに $v(t)$ が連続となる点 $t_0\in\mathbb{R}$ では

$\lim_{\substack{\Im z\geq 0\\ z\to t_0}}V(z)=v(t_0)$ が成り立つ。

定理２．Phragmén-Lindelöf　のトリックを用いた最大値原理

$\mathcal{D}$ を境界が空でない領域とする。$\mathcal{D}$ 上で定義された調和関数 $u(z)$

がある数 K で抑えられているとする。すなわち $u(z) \le K$。このとき、

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{D}\\ z\to\zeta}} u(z) \le M$$

がすべての $\zeta \in \partial\mathcal{D}$ で成り立つとき、$\mathcal{D}$ において $u(z) \le M$ が成立する。

$\Im z \ge 0$ で $v(t)$ が連続であるという仮定を追加すると次の定理 11 において上半平面で非負の調和関数に対するポアソンの積分公式が示される。これは定理 10 の逆命題と考えれる。定理１１では複素平面における実数軸より上にある半平面（上半平面）を定理２の $\mathcal{D}$ とし、その境界 $\partial\mathcal{D}$ としては実数軸 $z = x \quad -\infty < x < \infty$ をとる。これらを踏まえて定理１１を証明しよう。

定理１１　$v(z)$ *を* $\Im z > 0$ *で非負、* $\Im z \ge 0$ *で連続な調和関数とする。*

このとき、ある $0 \le a < \infty$ *が存在して* $v(z)$ *は*

$$v(z) = a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v(t)dt$$

と書ける。そしてこのとき、 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t^2+1}dt < \infty$ *が成り立つ。*

証明）$M > 0$ をひとつ固定して　$v_M(t) = \min\{v(t), M\}$ とおく。$\Im z > 0$ において　$\displaystyle V_M(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v_M(t)dt$ とおく。$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_M(t)}{1+t^2}dt \le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{1+t^2}dt = M$ であるから、定理１０より $V_M(z)$ は調和関数である。また同じ理由で、$0 \le V_M(z) \le M$ であり、すべての $t \in \mathbb{R}$ で $v(t)$ は連続であるから $\displaystyle\lim_{\substack{z\to t\\ \Im z>0}} V_M(z) = v_M(t)$ がわかる。

$w_M(z) = V_M(z) - v(z), \Im z \geq 0$ とおくと調和関数$V_M(z)$ と調和関数$v(z)$ の差

である$w_M(z)$も調和関数となる。$w_M(z)$が上半平面の境界上の点すなわち実数

$z = t$において $w_M(t) = v_M(t) - v(t) = \min\{v(t), M\} - v(t) \leq 0$となる。ここで定理２において$K = M$ として、境界で最大をとるという定理２の結果を用いると $w_M(t) \leq 0$ という条件より実は上半平面全体で$w_M(z) \leq 0$であることが導かれる。

とくに、$z = i$ とおくと$w_M(i) \leq 0$、すなわち $V_M(i) - v(i) \leq 0$を得るが、これは

$V_M(i) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|i-t|^2} v_M(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} v_M(t)\,dt \leq v(i) < \infty$を意味する。

$\lim_{M \nearrow \infty} v_M(t) = v(t)$ であり$v_M(t)$ はM について増加であるので、単調収束定理より積分と lim が交換できて $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} v(t)\,dt = \lim_{M \nearrow \infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} v_M(t)\,dt \leq v(i) < \infty$がいえる。定理の後半部分が示された。

上半平面全体で調和関数$w_M(z) = V_M(z) - v(z) \leq 0$の関係は書き直せば

$v(z) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v_M(t)\,dt \geq 0$となるが、$M \nearrow \infty$ として再び単調収束定理を使うと $v(z) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v(t)\,dt \geq 0$ となる。つまり、$W(z) = v(z) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v(t)\,dt$ は$\Im z > 0$ で非負な調和関数でこれは$\Im z \geq 0$ で連続である。ところが定理１０ “$v(t)$ が連続となる点$t_0 \in \mathbb{R}$では$\lim_{\substack{\Im z \geq 0 \\ z \to t_0}} V(z) = v(t_0)$ が成り立つ“を$W(z)$ に適用すれば、すべての$x \in \mathbb{R}$ で連続であることを仮定しているのでz が実数$z = x$のすべてで$W(x) = 0$ となる。したがって Schwarz の鏡映原理により$\Im z < 0$ では$W(\bar{z}) = -W(z)$ で定義してやると$W(z)$ は全平面で調和関数に拡張できる。

こうして$W(\mathrm{z})$は全平面で解析的な関数の実数部として表されその解析関数のテーラー展開から導かれる　$W\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R^{|n|} e^{in\theta}$　は$\mathbb{C}$　全体で絶対収束しているフーリエ級数となる。また、フーリエ係数は　$a_n R^{|n|}=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta$

である。そしてまた、$W(\overline{z})=-W(z)$より

$\int_{-\pi}^{0} W\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta=\int_{0}^{\pi} W\left(\mathrm{Re}^{-i\theta}\right) e^{in\theta} d\theta=-\int_{0}^{\pi} W\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) e^{in\theta} d\theta$であるから、

$a_n R^{|n|}=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta=-\dfrac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi} W\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\sin n\theta d\theta$　がわかる。これから

$a_{-n}=-a_n$　がわかる（特に$a_0=0$　）。$0<\theta<\pi$　では、$\left|\sin n\theta\right|\le n\sin\theta$　が成り立つので、$\left|a_n\right| R^{|n|}=\left|\dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} W\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\sin n\theta d\theta\right|\le |n| \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} W\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\sin\theta d\theta=|n|\left|a_1\right| R$がわかる。

すなわち、$\left|a_n\right|\le \dfrac{n}{R^{n-1}}\left|a_1\right|$，$n=1,2,\cdots$　がすべての$R>0$　で成り立たなければならない。$n\ge 2$　では、$a_n=0$　を意味する。結局　$W\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R^{|n|} e^{in\theta}$

$=a_1\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)R=2ia_1 R\sin\theta$、あるいは、$W(\mathrm{z})=a_1\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)R=2ia_1\Im\mathrm{z}$である。

そして、$W(z)=v(z)-\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\Im z}{|z-t|^2} v(t)\,dt=a\Im z$、$a=2ia_1$　となり、$W(i)=a$　で$W(z)$は非負であったから、$a\ge 0$　も言える。目的の　$v(z)=a\Im z+\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\Im z}{|z-t|^2} v(t) dt$という等式が証明された。■

確認事項１） $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ であるから、$0<\theta<\pi$,$\left|\sin 2\theta\right| \le 2\sin\theta$

これを一般にして、$\left|\sin(n-1)\theta\right| \le (n-1)\sin\theta$ を仮定する。

$\sin n\theta = \sin\{(n-1)\theta+\theta\} = \sin(n-1)\theta\cos\theta + \cos(n-1)\theta\sin\theta$ で

$\left|\sin n\theta\right| \le \left|\sin(n-1)\theta\right| + \left|\sin\theta\right| \le (n-1)\sin\theta + \sin\theta = n\sin\theta$ は帰納法の仮定を使って導かれる。

確認事項２）Schwarz reflection principle
R.E.Greene, S.G.Krantz Function Theory of One Complex Variable, Third Edition,Graduate Studies in Mahtematics vol.40, AMS p.220
によると

Let V be a connected open set in $\mathbb{C}$. Suppose that

$V \cap (\text{real axis}) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Set $U = \{z \in V : \Im z > 0\}$ .Assume $\mathrm{W}: U \to \mathbb{R}$

is harmonicand for $\zeta \in V \cap (real\ axis)$, $\lim_{U \ni z \to \zeta} W(z) = 0$. Set $\hat{U} = \{\bar{z} : z \in U\}$.

Define $\hat{W}(z) = \begin{cases} W(z) & if \ \ z \in U \\ 0 & if \ \ z \in V \cap (real\ axis) \\ -W(\bar{z}) & if \ \ z \in \hat{U} \end{cases}$

Then $\hat{W}$ is harmonic on the open set $U \cup \hat{U} \cup \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

ここで、$a=-\infty$ $b=\infty$,U を上半平面ととればよい,