Koosis 先生の古典解析学

最大値の原理　Phragmén-Lindelöf のトリック１

調和関数の場合

定義　開集合$\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^2$上の　C^∞ 実関数$u=u(x,y)$ が、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ をみたすとき、

uは調和であるという。$\mathbb{R}^2$ を複素平面$\mathbb{C}$ と同一視して$u=u(x,y)$のかわりに、

$z=x+iy$ として$u=u(z)$　とも書こう。

調和関数は平均値の定理として知られる性質を持つ。

> 平均値の定理：　$u=u(z)$が$\mathcal{O}$ で調和で、$z_0\in\mathcal{O}$ と$r<dis(z_0,\partial\mathcal{O})$ に対して
>
> $$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta$$
>
> が成り立つ。

証明にはグリーンの定理が用いられる。しかし、ここではグリーンの定理を用いた証明はしない。そのかわり次の事実を述べよう。

$\mathcal{O}$で定義された複素数値をとる解析関数f を実部u と虚数部v に分けて

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$とするとき、偏微分u_x,u_y,v_y,v_x が存在して いわゆるコーシー・リーマンの微分方程式$u_x=v_y$ ，$u_y=-v_x$が成り立つ。さらに$f(z)$ の解析性より、u,v　は２回連続微分可能であり、コーシー・リーマンから微分して得られる等式 $u_{xx}=v_{yx}$，$u_{yy}=-v_{xy}$において、$v_{xy}=v_{yx}$ に注意すれば、

$u_{xx}+u_{yy}=0$ すなわち、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$を得て、$u=u(x,y)$は調和関数であることがわかる。また、$\mathcal{O}$内に含まれる長さをもつ連続単一閉曲線$C$ をとり、Cに含まれる領域の中のz_0 を選ぶと、コーシーの積分公式$f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$が成り

立つが、特に C を中心 z_0、半径 r の円としてみると、$z = z_0 + re^{i\theta}$ ，

$\dfrac{dz}{z-z_0} = \dfrac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = id\theta$ となるので、$f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)d\theta$ と書き直される。とくにこの等式の実数部分をみれば、$u(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\, d\theta$ であり、これは上の平均値の定理に他ならない。

平均値の定理からつぎの最大値の原理が従う。

> 定理１．**最大値の原理**
>
> $\mathcal{O}$ は有界な開集合とする。$\mathcal{O}$ で調和、$\bar{\mathcal{O}}$ で連続な調和関数を $u = u(z)$ とする。$\mathcal{O}$ の境界 $\partial\mathcal{O}$ 上で、$u(z) \le M$ とするとき、$\mathcal{O}$ 全体で $u(z) \le M$ となる。

証明）$K = \sup_{z\in\bar{\mathcal{O}}} u(z)$ 、$M = \sup_{z\in\partial\mathcal{O}} u(z)$ とおく。$K \ge M$ は sup をとる範囲の包含関係から明らかだが、$K > M$ と仮定して矛盾をだす。その結果 $K \le M$ かつ $K \ge M$ となり、$K = M$ が結論される。

$K > M$ と仮定：$\bar{\mathcal{O}}$ はコンパクトであり、$K = \sup_{z\in\bar{\mathcal{O}}} u(z)$ の上限は max で置き換えられ、$u(z_0) = K$ となる $z_0 \in \bar{\mathcal{O}}$ がとれる（コンパクト集合で定義された連続関数 u は定義域で最大値をとる。最大値の定理）。境界 $\partial\mathcal{O}$ 上で $u(z) \le M$ という仮定から $z_0 \in \partial\mathcal{O}$ だと、$u(z_0) = K$ であることができない。つまり、$z_0 \in \mathcal{O}$ ということになる。$r < dis(z_0, \partial\mathcal{O})$ を選び、z_0 を中心、半径 r の円を考えるとこの円は $\mathcal{O}$ にすっぽり囲まれてしまう。上で述べた平均値の定理から、

$K = u(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\, d\theta$。ところで、$K = \sup_{z\in\bar{\mathcal{O}}} u(z)$ であったから、

$u\left(z_0+re^{i\theta}\right)\le K$ 。これからすべての θ で $u\left(z_0+re^{i\theta}\right)=K$ が導かれる。何故なら、

どこかの $\theta=\theta_0$ で $u\left(z_0+re^{i\theta}\right)<K$ とすると十分小さな $\varepsilon>0$ にたいし

$\theta\in I_\varepsilon=\left(-\varepsilon+\theta_0,\varepsilon+\theta_0\right)$ で $u\left(z_0+re^{i\theta}\right)<K$ が成り立つので

$\int_0^{2\pi}u\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta=\int_{I_\varepsilon}ud\theta+\int_{[0,2\pi]\setminus I_\varepsilon}ud\theta$ として $\int_{I_\varepsilon}ud\theta<2\varepsilon K$ 、 $\int_{[0,2\pi]\setminus I_\varepsilon}ud\theta\le\left(2\pi-2\varepsilon\right)K$

を考慮すると、 $K=u\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta<\frac{1}{2\pi}\left(2\varepsilon K+\left(2\pi-2\varepsilon\right)\right)=K$ という

矛盾が導かれる。中心 z_0 半径 r の円 C_r とする。いま、 $\min\left(dis\left(z,\partial\mathcal{O}\right);z\in C_r\right)$

を考えると、この最小値を与える $z_r\in C_r$ が取れる。ところで上で $u\left(z_r\right)=K$ を証

明した。 $r<dis\left(z_0,\partial\mathcal{O}\right)$ であったが、 $r_1<r_2<\cdots<r_n\to dis\left(z_0,\partial\mathcal{O}\right)$ となる無限列

$\left\{r_n\right\}$ を考えると、 $z_{r_n}\to\zeta\in\partial\mathcal{O}$ となる ζ が見つかるが $u=u\left(z\right)$ は $\bar{\mathcal{O}}$ で連続関数

であったことから $u\left(z_{r_n}\right)\to u\left(\zeta\right)$ であり、 $u\left(\zeta\right)=K$ であることになる。しかし、

これは $K>M$ の仮定と $M=\sup_{z\in\partial\mathcal{O}}u\left(z\right)$ とおいたこととが矛盾してしまう。した

がって $K=M$ でなければならない。■

注意事項：証明を見直すと、 $M=\sup_{z\in\partial\mathcal{O}}u\left(z\right)$ とするとき、 $u=u\left(z\right)$ は定数 M を

とる定数関数のときを例外として、 $u=u\left(z\right)$ は $z\in\mathcal{O}$ で $u=u\left(z\right)<M$ となってい

る。境界で最大値を到達し $\mathcal{O}$ 内点では M より本当に小さく、内点では決して M という値 をとらない。

定理では、 $u=u\left(z\right)$ の $z\in\partial\mathcal{O}$ における連続性を仮定しているが、これを次のようにすこしだけ緩めることができる。

系　$\mathcal{O}$を有界な開集合とし、$u=u(z)$を$\mathcal{O}$で調和関数とする。

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{O}\\ z\to\zeta}} u(z) \le M \qquad (1)$$

が任意の$\zeta\in\partial\mathcal{O}$とするとき、$\mathcal{O}$において$u(z)\le M$が成立する。

証明）$\delta>0$ に対して、$\mathcal{O}_\delta=\{z\in\mathcal{O}; dist(z,\partial\mathcal{O})>\delta\}$ とおく。任意に$\varepsilon>0$ を固定し、不等式（1）と$\partial\mathcal{O}$がコンパクトであることを使うと、$\delta>0$を十分小さく（εの大きさに依存して）とると$u(z)<M+\varepsilon$ が $z\in\mathcal{O}_\delta$で成り立つ。いま、

$\eta>0$ に対して、$\mathcal{O}=\bigcup_{0<\delta<\eta}\mathcal{O}_\delta$ に注意する。$\varepsilon>0$が任意であることと

$u(z)<M+\varepsilon$より$\mathcal{O}$において$u(z)\le M$とならなければならない■

ここまで、$\bar{\mathcal{O}}$のコンパクト性の仮定、したがって$\partial\mathcal{O}$がコンパクトであることが証明で決定的であった。実際、$\mathcal{O}$が有界でないときはどうなるのだろうか？

は複素上半面を$\mathcal{O}$として$u(z)=y$を考える。$u(z)=y$が$u_{xx}+u_{yy}=0$を満たすこと

はあきらかである。そして、$\partial\mathcal{O}$で$u(z)=0$となっている。しかし、$u(z)=y$は

$y\uparrow\infty$ でいくらでも大きくなる。境界では有界だが内点ではいくらでも大きくなる点があるのだから定理１は成り立たない。

救済策として、Phragmén-Lindelöf　のトリック（手品）を用いた最大値原理を述べる。

定理２．Phragmén-Lindelöf　のトリックを用いた最大値原理

$\mathcal{D}$ を境界が空でない領域とする。$\mathcal{D}$上で定義された調和関数 $u(z)$

がある数K で抑えられているとする。すなわち$u(z)\le K$。このとき、

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{D}\\ z\to\zeta}} u(z) \le M$$

がすべての$\zeta\in\partial\mathcal{D}$で成り立つとき、$\mathcal{D}$ において$u(z)\le M$が成立する。

証明）$\zeta_0 \in \mathcal{D}$ を固定する。仮定により、任意に定めた$\varepsilon>0$ に対してある$\delta>0$ が存在して、$\mathcal{D}_\delta=\left\{z\in\mathcal{D};\left|z-\zeta_0\right|\le\delta\right\}$ において、$u(z)\le M+\varepsilon$ となる。もし、$\mathcal{O}_\delta=\left\{z\in\mathcal{D};\left|z-\zeta_0\right|>\delta\right\}$においても$u(z)\le M+\varepsilon$が成り立つことを示すことができたら、$\varepsilon$ の任意性により証明が終わったことになる。

$\eta>0$ を任意に固定して、$v(z)=u(z)-\eta\log\left|\dfrac{z-\zeta_0}{\delta}\right|$ とおくと、$v(z)$ は $\mathcal{O}_\delta=\left\{z\in\mathcal{D};\left|z-\zeta_0\right|>\delta\right\}$において、$\log\left|\dfrac{z-\zeta_0}{\delta}\right|$は$\mathcal{O}_\delta$ で解析的な関数$\log\left(\dfrac{z-\zeta_0}{\delta}\right)$の実数部分であるから調和関数であり、$\log\left|\dfrac{z-\zeta_0}{\delta}\right|>0$より$v(z)<u(z)$ が成り立つ。

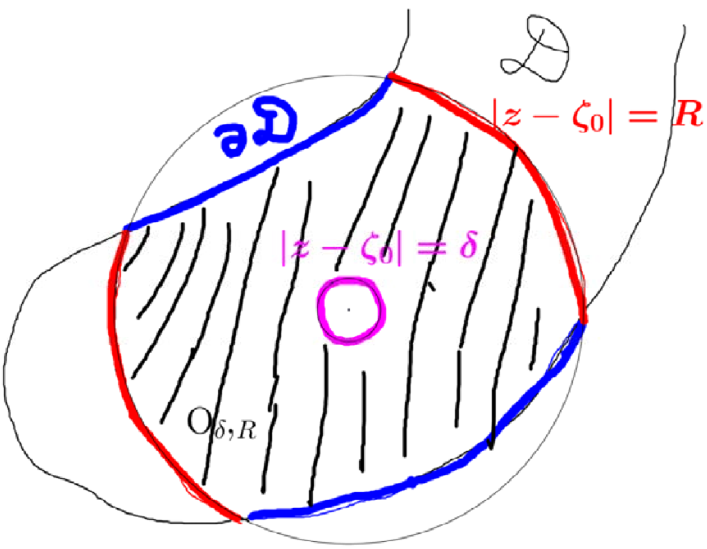
$\mathcal{O}_{\delta,R}=\left\{z\in\mathcal{O}_\delta;\left|z-\zeta_0\right|<R\right\}=\left\{z\in\mathcal{D};\delta<\left|z-\zeta_0\right|<R\right\}$を定義する。$\mathcal{O}_{\delta,R}$ は有界な開集合である。$\zeta\in\partial\mathcal{O}_{\delta,R}$ とすると、

（１）$\zeta\in\partial\mathcal{D}$ ブルー

（２）$\zeta\in\partial D_\delta=\left\{z;\left|z-\zeta_0\right|=\delta\right\}$ マゼンダ

（３）$\zeta\in\mathcal{O}_\delta$ でかつ$\left|\zeta-\zeta_0\right|=R$ レッド

の３とおりのいずれかである（次の図参照）



$\mathcal{O}_{\delta,R}$ は、大きい円$\{z;|z-\zeta_0|=R\}$ と小さい円$\{z;|z-\zeta_0|=\delta\}$で囲まれたドーナッツと$\mathcal{D}$ の共通部分（斜線部）である。$\mathcal{D}$は一般には有界でない。

（１）（$\zeta\in\partial\mathcal{D}$）のところでは

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{O}_{\delta,R}\\ z\to\zeta}} v(z)\le\limsup_{\substack{z\in\mathcal{O}_{\delta,R}\\ z\to\zeta}} u(z)\le M$$

（２）（$\zeta\in\partial D_\delta=\{z;|z-\zeta_0|=\delta\}$）のところでは

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{O}_{\delta,R}\\ z\to\zeta}} v(z)\le\limsup_{\substack{z\in\mathcal{O}_{\delta,R}\\ z\to\zeta}} u(z)\le M+\varepsilon$$

（３）（$\zeta\in\mathcal{O}_\delta$ でかつ）$|\zeta-\zeta_0|=R$のところでは

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{O}_{\delta,R}\\ z\to\zeta}} v(z)\le\limsup_{\substack{z\in\mathcal{O}_{\delta,R}\\ z\to\zeta}}\left\{u(z)-\eta\log\left|\frac{z-\zeta_0}{\delta}\right|\right\}\le K-\eta\log\frac{R}{\delta}$$

これらから有界な$\mathcal{O}_{\delta,R}$の上の調和関数$v(z)$ は任意の$\zeta\in\partial\mathcal{O}_{\delta,R}$に対して

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{O}_{\delta,R}\\ z\to\zeta}} v(z)\le\max\left\{M+\varepsilon,K-\eta\log\frac{R}{\delta}\right\}$$

が成立するので、定理１の系を用いると、 $z\in\mathcal{O}_{\delta,R}$に対して

$$v(z)\le\max\left\{M+\varepsilon,K-\eta\log\frac{R}{\delta}\right\}$$

が成り立つ。したがって任意$z\in\mathcal{O}_{\delta,R}$に対して

$$u(z)\le\max\left\{M+\varepsilon,K-\eta\log\frac{R}{\delta}\right\}+\eta\log\left|\frac{z-\zeta_0}{\delta}\right|$$

が言えたことになる。

いま、$z\in\mathcal{O}_\delta$ をひとつ考えると、R を大きくとり$z\in\mathcal{O}_{\delta,R}$かつ$K-\eta\log\dfrac{R}{\delta}\le M+\varepsilon$と両方の条件を満たすぐらいに大きくとる。その結果

$$u(z)\le M+\varepsilon+\eta\log\left|\frac{z-\zeta_0}{\delta}\right|$$

となる（手品によりK が不等式から消えてしまった）。

ここにおいて$\eta > 0$の任意性から

$u(z) \le M + \varepsilon$, $z \in \mathcal{O}_\delta$

でなければならない。証明の冒頭で述べたように$\mathcal{D}_\delta = \{z \in \mathcal{D}; |z - \zeta_0| \le \delta\}$ において、$u(z) \le M + \varepsilon$であった。$\mathcal{D} = \mathcal{D}_\delta \cup \mathcal{O}_\delta$ であるから、結局

$u(z) \le M + \varepsilon$が$\mathcal{D}$全体で言えているが、このε は勝手に小さくできる。

ゆえに$u(z) \le M$, $z \in \mathcal{D}$ ■

注意：

（１）証明で導入した関数$\log\left|\dfrac{z - \zeta_0}{\delta}\right|$はPhragmén-Lindelöfの関数と呼ばれる。

（２） $u(z) \le K$, $z \in \mathcal{D}$の仮定は弱められないか？

$z \to \infty$ のとき$u(z) \le o(\log|z|)$は十分条件である.。他方$u(z) = O(\log|z|)$ は十分でない。と言うのは$\mathcal{D} = \{z; |z| > 1\}$ のとき、$u(z) = \log|z|$ を考えれば、

$u(z) = \log|z| = 0$,$z \in \partial\mathcal{D} = \{z : |z| = 1\}$であるが、あきらかに$\mathcal{D}$ではこの$u(z)$は発散してしまう。