Koosis 先生の古典解析学２（p.11～p.14）

最大値の原理　Phragmén-Lindelöf のトリック２

劣調和関数の場合

１９世紀数学は等式の時代、２０世紀数学は不等式の時代であったそうである。最大値原理は Dirichlet 問題のような境界値偏微分方程式を扱うときに現れる。調和関数（すなわち解析関数、いわゆる等式を伴う関数）に限定してしまうと、領域の一部の値が全体を支配してしまう特殊な場合しかカバーできない。むしろ連続性の条件を半連続（不等式を伴う条件）に弱めたり、劣調和、優調和関数（不等式を伴う）へと関数の範囲を広げることにより応用可能性が一気に広がる。これは２１世紀においても正しい方向であると信ずる。

定義：X を一般の集合とする。$\mathcal{S}$ が X のある部分集合からなる集合族とする。$\mathcal{S}$ が X 上の**完全加法族(σ algebra)**とは次の２つを満たすときをいう。

（ｉ）$E \in \mathcal{S} \ \Rightarrow \ E^c = X \setminus E \in \mathcal{S}$

（ii）$\mathcal{S}$ の集合族 $\left\{E_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ に対して $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{S}$

定義：X を一般の集合とする。$\mathcal{E}$ を X のある部分集合からなる集合族とする。$\mathcal{B}$ が $\mathcal{E}$ を含む**最小の完全加法族**とは

（ｉ）$\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$

（ii）$\mathcal{B}$ は X 完全加法族

（iii）$\mathcal{T}$ を X 上の完全加法族で $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ とする。このとき、$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ が成立する。

以後では $X = \mathbb{R}^n$ あるいは、$X = \mathbb{R}^2$ と考える。

定義：$\mathbb{R}^n$ の開集合の全体を含む最小の完全加法族を**ボレル集合族**、その要素を**ボレル集合**と呼ぶ。

複素平面 $\mathbb{C}$ の点 $x+iy \ \leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$ の対応という全単射があるから、位相（開集合、区間などの定義）を考えるとき同一視 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ を行う。

定義　$\mathcal{D} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ のとき、ボレル集合 $\mathcal{D}$ の上で定義される関数 $u(z)$ が

$-\infty \le u(z) < \infty$ であり、すべての $z_0 \in \mathcal{D}$ で $\displaystyle\limsup_{\substack{z \in \mathcal{D} \\ z \to z_0}} u(z) \le u(z_0)$ をみたすとき**上半連続**であるといわれる。

上半連続の関数はつぎの性質を持つ。

１．任意の$a\in[-\infty,\infty)$に対して、$u^{-1}[a,\infty)$ は$\mathcal{D}$における相対位相で閉集合である。したがって$u(z)$はボレル関数（ルベッグ可測関数）であり$u(z)$のルベッグ積分が定義できる。

2.　$\mathcal{D}$がコンパクトとすると$u(z)$は有界で$\mathcal{D}$の上で最大値をとる。

３．$\mathcal{D}$は有界な領域とする。$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{D}\\ z\to\zeta}} u(z)$がすべての$\zeta\in\partial\mathcal{D}$ で有限とすると、それらの値は一様有界であり、$u(\zeta)=\limsup_{\substack{z\in\mathcal{D}\\ z\to\zeta}} u(z)$が各$\zeta\in\partial\mathcal{D}$に対して定義され結果として$u(z)$は$\bar{\mathcal{D}}$ に拡大される。そしてその結果も上半連続である。

性質１，２により定義域での積分ができる。ただし、積分の値が$-\infty$ となってしまう場合も許す。

定義：定義域$\mathcal{D}$で値域が$[-\infty,\infty)$に含まれる関数$u(z)$が次の条件をみたすとき、$u(z)$は$\mathcal{D}$において**劣調和**であるという。

１．$u(z)$は$\mathcal{D}$において上半連続

２．すべての$z_0\in\mathcal{D}$に対して十分小さなρ　（この大きさはz_0 に依存）が存在して、$u(z_0)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)d\theta$が成立している。

注意：

１．$-u(z)$ が劣調和のとき$u(z)$は優調和と言われる。

２．調和であることは、優調和でありかつ劣調和であるということに等しい

３．劣調和関数がいくつかあるときそれらの正数を係数とした一次結合は再び劣調和関数である。

複素数は$z=x+iy$とも　$z=re^{i\theta}$とも表せるが、$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$　であり$\theta=\arg z$である。この場合θ に$2n\pi,n\in\mathbb{Z}$ をたしても引いても$z=re^{i\theta}$の値はかわらない。

$\arg z$ のこの不確定さは $z=0$ の近くでは問題を生じさせる。z がある点 $z=z_0$ から少し動いたとする。その結果動いた z の絶対値 $|z|$ と $|z_0|$ は少ししか違わない。この状況は原点から十分遠いところにあれば、$|z|$ と $|z_0|$ だけでなく $\arg z$ と $\arg z_0$ も少ししか違わないといえるだろう。ところが $z_0=0$ の近傍では $|z|$ と $|z_0|$ の差は小さいにもかかわらず $\arg z$ と $\arg z_0$ が大きく違うものがでてきてしまう。$\arg z+2k\pi$ の θ を持つもの。このことは複素数値をとる関数を考えているときに問題を生じさせ連続性（解析性）がくずれてしまうのである。

$f(z)$ が $\mathcal{D}$ で解析的なとき、$\log|f(z)|$ は劣調和関数の代表である。

$\log f(z)=\log|f(z)|+i\arg(f(z))$ とあらわしてみると $\log|f(z)|$ は解析関数 $\log f(z)$ の実部であるが $f(z)=0$ ではこれを定義できない。そこで $f(z)=0$ のとき、$\log|f(z)|=-\infty$ と便宜上解釈して劣調和関数と考えることができる。実際、$\log|f(z)|$ は $\mathcal{D}$ 上で決して $+\infty$ という値をとることがないし、$z_0\in\mathcal{D}$ を固定したとき、$\log|f(z)|$ は z_0 において連続であるから、$f(z_0)$ がゼロであるかどうかは明らかである。もし、$f(z_0)=0$ なら、上の積分不等式において左辺$=-\infty$ となり、右辺はなんであれ劣調和の条件が成立する。また、z_0 を中心とする $\mathcal{D}$ に含まれる小さな円において $f(z)$ が解析的なら、コーシーの公式から

$$\log f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)d\theta$$

であり、両辺のそれぞれ実部だけ考えると

$$\log|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

となる。調和関数で示した最大値原理とその一般化は劣調和関数の場合に拡張される。

定理３　$u(z)$ *が有界な領域* $\mathcal{D}$ *で劣調和とする。すべての* $\zeta \in \partial\mathcal{D}$ *で*

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{D} \\ z\to\zeta}} u(z) \le M$$

のとき、 $\mathcal{D}$ *で* $u(z) \le M$ *である。*

証明）$\mathcal{D}$ の境界上の各点 ζ に対して　$u(\zeta) = \limsup_{\substack{z\in\mathcal{D} \\ z\to\zeta}} u(z)$ と定義する。

$u(z)$ は $\mathcal{D}$ において上半連続の性質から、境界まで拡大された関数も上半連続となり上で述べた性質を使うと最大値をとる。それを K とおこう。またその最大値を $z_0 \in \mathcal{D}$ でとるとしてみよう。劣調和の条件から、

$$K = u(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) d\theta$$

が十分小さい r_0 をとって、$0 < \rho < r_0$ で成り立つ。しかし、これは、$0 < \rho < r_0$ と $\theta \in [-\pi, \pi]$ をみたすところで、$u\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) = K$ *a.e.* を意味する。言いかえれば、z_0 を中心半径 r_0 の円内 $\mathcal{B}(z_0, r_0)$ で $u(z) = K$ *a.e.* といってもよい。いま、a.e.であるが、すべての $\mathcal{B}(z_0, r_0)$ に属する z で $u(z) = K$ を示そう。

$u\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) = K$ *a.e.* であるから、ある $u(z_n) = K$ で $z_n \to z$ となる点列 $\{z_n\}$ が取れる。というのは $\mathcal{B}(z_0, r_0)$ は有界であるから Bolzano-Weierstrass の性質から $z_n \to z$ という収束するものが見つかるが z の ε 近傍にはいつでも $u(z_n) = K$ となる z_n が探し出せる。できないとすると ε 近傍という正測度集合の上で

$u \neq K$ となり $u\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)=K$ $a.e.$に矛盾する。ところがuは上半連続であったので、$u\left(z_n\right)=K$ であることから形式的に $K=\lim u\left(z_n\right) \leq u\left(z\right)$ が成り立つ。しかし、K は$\mathcal{D}$での最大値であったから、$u\left(z\right)=K$ が$\mathcal{B}\left(z_0, r_0\right)$全体で成り立つはずである。今度は$\mathcal{D}$全体で$u\left(z\right)=K$になることを示そう。

そのために、集合$\mathcal{G}=\left\{z \in \mathcal{D};\, u=K\text{がzの近傍で成り立つ}\right\}$ を考える。この集合$\mathcal{G}$は開集合である。また、$z^* \in \mathcal{D}$ に収束する$\mathcal{G}$ の点列$\left\{z_n\right\}$ をとると、uが上半連続であるということから、$K=\lim u\left(z_n\right) \leq u\left(z^*\right) \leq K$ となり、$u\left(z^*\right)=K$ となり、$z^* \in \mathcal{G}$ も成り立つ。このことは$\mathcal{G}$は$\mathcal{D}$ 位相で閉集合ということになる。$\mathcal{D}$は連結（領域の定義）であるから、$\mathcal{G} \in \left\{\phi, \mathcal{D}\right\}$ であるが、$z_0 \in \mathcal{G}$ なので、$\mathcal{G} \neq \phi$

すなわち、$\mathcal{G}=\mathcal{D}$ ということになる。いいかえれば、$u\left(z\right)=K$ が$\mathcal{D}$全体で成り立つ。（ $\mathcal{D}$の 連結な部分集合が$\mathcal{D}$閉集合であり$\mathcal{D}$開集合の性質をみたすのは、その部分集合は$\mathcal{D}$自身か空集合に限る）。u の定義域を$\mathcal{D}$の境界にまで拡張した結果：$\zeta \in \partial\mathcal{D}$ について

$$K=\lim u\left(z_n\right) \leq u\left(\zeta\right) \leq K$$

となり、$u\left(\zeta\right)=K$ を得る。仮定$u\left(\zeta\right) \leq M$より、すべての$z \in \mathcal{D}$ について

$u\left(z\right) \leq K \leq M$ 。これで証明は完結した。■

調和関数のときに$\mathcal{D}$の有界でない場合の一般化された最大原理を示したが、そのとき用いた Phragmén-Lindelöf のトリックは劣調和関数についても全く同様に応用できる。実際

$$v\left(z\right)=u\left(z\right)-\eta \log\left|\frac{z-\zeta_0}{\delta}\right|$$

とおくと、$u\left(z\right)$ が劣調和なら$v\left(z\right)$ も劣調和である。何故なら$-\eta \log\left|\frac{z-\zeta_0}{\delta}\right|$

は劣調和関数であるからである（調和関数は劣調和でもあることと２つの劣調和関数の和は劣調和関数であるという事実を用いた）。
結局次の定理を得る

> *定理４．Phragmén-Lindelöf　のトリックを用いた最大値原理*
>
> *$\mathcal{D}$　を境界が空でない領域とする。$\mathcal{D}$ 上で定義された劣調和関数 $u(z)$*
>
> *がある数K　で抑えられているとする。すなわち$u(z) \le K$。このとき、*
>
> $$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{D}\\ z\to\zeta}} u(z) \le M$$
>
> *がすべての$\zeta \in \partial\mathcal{D}$ で成り立つとき、$\mathcal{D}$　において$u(z) \le M$ が成立する。*

補足：「数学じやーごん」をすこしだけ
ボレル(Borel)集合はボレル可測集合とも呼ぶ。実数値関数uにおいて、すべての実数α　に対して$\{x : \mathrm{u}(x) > \alpha\}$がボレル集合のとき、$u$　は**ボレル可測関数**と呼ばれる。$X = \mathbb{R}^n$　について半開区間$I = \prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j]$、閉区間$I = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$、開区間　$I = \prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j)$のいずれも共通の値$v(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$を与える測度$\nu$　で$\mathbb{R}^n$の図形の体積（$n=2$　では面積、$n=1$　では長さ）を与えるものとしてルベーグ測度νが定義される。その際$\mathbb{R}^n$の図形はルベッグ可測集合と呼ばれるが、ルベッグ可測集合は完全加法族であり、開集合を含むことが示されるのでボレル可測集合の最小性から、「ボレル可測集合$\subset$ ルベッグ可測集合」
という包含関係が成り立つ。

連続関数　uは$\{x : f(x) > \alpha\}$が開集合になるので、連続関数はいつもボレル可測関数である。そして、すべてのボレル集合を可測にするような測度を**ボレル測度**と呼ぶ。さらに、任意のコンパクト集合について有限となるような測度は**ラドン(Radon) 測度**と呼ばれる。一般に、測度μ　が０となる集合を除いてある性質が成り立つとき、その性質はμalmost-everywhere(μa.e) に成り立つという。
測度がルベッグ測度の時はμ　を省略して、**almost-everywhere(a.e) に成り立つ**という。