Koosis 先生の古典解析学３　p.14~p.17

最大値の原理　Phragmén-Lindelöf 第３のトリック

角領域の場合

角領域の場合には、定理４とは別の形の最大値の原理を示すことができる。

> **定理５**．*原点に頂点をもち、角度が* 2γ ，$0<\gamma\le\pi/2$ *の角領域を* $\mathcal{S}$ *とし、* $u(z)$ *は* $\mathcal{S}$ *において劣調和であるとする。ただし、頂点は* $\mathcal{S}$ *にふくまれないとしておく。すべての* $\zeta\in\partial\mathcal{S}$ *において、*
>
> $$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{S}\\ z\to\zeta}} u(z)\le M$$
>
> *を仮定する。ある* $\alpha<\dfrac{\pi}{2\gamma}$ *と、* $u(z)\le C|z|^{\alpha}$ *となる* $C>0$ *が存在するなら、*
>
> $$u(z)\le M$$
>
> *が* $\mathcal{S}$ *のすべてで成り立つ。*

注意：$\alpha=\dfrac{\pi}{2\gamma}$ では定理は成り立たない。そのため、$\dfrac{\pi}{2\gamma}$ はクリティカル指数と呼ばれる。

証明） z を適当な β で $e^{i\beta}z$ に置き換えて議論することにより、一般性を失うことなく、はじめから $\mathcal{S}=\{z; z\ne 0 \text{ で } |\arg z|<\gamma\}$ とおいてよい。$\alpha<\alpha'<\dfrac{\pi}{2\gamma}$ を固定する。$\mathcal{S}$ は単連結で原点を含まないので、$z^{\alpha'}$ は $\mathcal{S}$ で解析的である。特に実部は調和関数である。$z=re^{i\theta}$ とおけば、$z^{\alpha'}$ の実部は $r^{\alpha'}\cos(\alpha'\theta)$ と書ける。$0<\alpha'<\dfrac{\pi}{2\gamma}$ より、$|\theta|<\gamma$ において、$\Re\left(z^{\alpha'}\right)=r^{\alpha'}\cos(\alpha'\theta)>0$ である。これは、$D=\cos(\alpha'\theta)>0$ とおくと $\Re\left(z^{\alpha'}\right)\ge Dr^{\alpha'}>0$ と書ける。いま、$\eta>0$ を任意に選んで $\mathcal{S}$ の上で、

$$u_\eta(z)=u(z)-\eta\,\Re\left(z^{\alpha'}\right)$$

と定義する。この関数は劣調和であり、定理の仮定より $\zeta\in\partial\mathcal{S}$ に対して

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{S}\\ z\to\zeta}} u_\eta(z)\le M$$

が言える。さらに、$u_\eta(z) \le Cr^\alpha - \eta\, Dr^{\alpha'}$ も成立している。そこで $\alpha < \alpha'$ であったことを思い出すと、十分大きな R をとって、$r > R$ では $u_\eta(z) \le Cr^\alpha - \eta\, Dr^{\alpha'} \le M$ とできる。言い換えれば、$\{z \in \mathcal{S}; |z| \ge R\}$ で $u_\eta(z) \le M$ が成り立っている。一方有界領域における最大値原理（定理３）を用いれば、$\{z \in \mathcal{S}; |z| < R\}$ で $u_\eta(z) \le M$ が成り立つ。結局、$\mathcal{S}$ のすべての z で $u_\eta(z) \le M$ が成り立つことがいえた。ところが $u(z) = u_\eta(z) + \eta\, \Re(z^{\alpha'})$ であったのであるが

$u(z) = u_\eta(z) + \eta\, \Re(z^{\alpha'}) \le M + \eta\, \Re(z^{\alpha'})$ と言う不等式で、$\eta > 0$ がいくらでも小にできることから、実は $\mathcal{S}$ のすべての z で $u(z) \le M$ である。■

クリティカル指数に対する定理

$\alpha = \dfrac{\pi}{2\gamma}$ の場合定理はどうなるか？

まず $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\alpha = 1$ のときを考えよう。$\mathcal{S}$ は上半平面となる。$z \to z^\beta$ と変数変換することで、一般性を失うことなく、$\mathcal{S} = \{z; \Im z > 0\}$ とおいてよい。

> ***定理６．*** $u(z)$ *が* $\Im z > 0$ *で定義された劣調和関数、すべての* $x \in \mathbb{R}$ *に対して*
>
> $$\limsup_{\substack{\Im z > 0 \\ z \to x}} u(z) \le M$$
>
> *を満たしているとする。このとき、もし、* $u(z) \le C|z|$ *であるなら*
>
> $$u(z) \le M + a\Im z$$
>
> *が成り立つ。ここで、* $a = \limsup_{y \to \infty} \dfrac{u(iy)}{y}$

証明）$u(z)\le C|z|$ より、$u(iy)\le Cy$ ，$y>0$ であるから、$a=\limsup_{y\to\infty}\dfrac{u(iy)}{y}$ において、$-\infty\le a\le C$ である。いま、$a'>a$ を任意に固定する。関数 $a'\Im z$ 解析関数の虚部であるから調和関数であり、$\limsup_{\substack{\Im z>0\\ z\to x}} a'\Im z=0$ が任意の $x\in\mathbb{R}$ で成り立つ。したがって、$v(z)=u(z)-a'\Im z$ は劣調和で $\limsup_{\substack{\Im z>0\\ z\to x}} u(z)\le M$ の仮定から、$\limsup_{\substack{\Im z>0\\ z\to x}} v(z)\le M$ である。複素平面における第１象限を考える。第１象限における境界は実軸 $x>0$ と虚軸 $iy,\ y>0$ とからなる。実軸上では $\limsup_{\substack{\Im z>0\\ z\to x}} v(z)\le M$ がそのまま使える。虚軸（$z=iy, y>0$ ）において、ある定数 K で上から抑えられることを示そう。じっさい H を十分大きくとれば、$v(iy)=\left(\dfrac{u(iy)}{y}-a'\right)y\le 0$ が $y>H$ で成立する（$a=\limsup_{y\to\infty}\dfrac{u(iy)}{y}$、$a'>a$ であった）。そこで、$K=\max\left\{\max_{0<y\le H}\{v(iy)\},0\right\}$ としておけばよい。ここで、$\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ 、$\alpha<2$ として定理５を応用する。すなわちいま $v(z)=u(z)-a'\Im z\le C|z|$ であるから、$\alpha=1$ として定理５を用いれば、第１象限において、$v(z)\le\max\{M,K\}$ が成り立つ。この論法は第２象限でもそのまま つかえる。その結果、すべての $\Im z>0$ で $v(z)\le\max\{M,K\}$ が成立したことになる。定理４を使うとじつは、上半平面の境界すなわち実軸での最大値 $=M$ で抑えられることになる：$v(z)\le M$ 。したがって、

$u(z)=v(z)+a'\Im z\le M+a'\Im z$ 。ところが、$a'>a$ の任意性より、

$u(z)\le M+a\Im z$ でなければならない。■

注意：*仮定*$u(z)\le C|z|$ *は任意定数*B *を加えて*$u(z)\le C|z|+B$ *としても同じ結論になる。何故なら*$u(z)-B$ *という劣調和関数に定理を適用すればよい。*

この注意と定理より次の系を得る、

系： $f(z)$ ***を***$\Im z\ge 0$ ***で連続、***$\Im z>0$ ***で解析的とする。また、実軸***$\mathbb{R}$ ***上で*** $|f(x)|\le M$ ***とする。もし２つの定数***$\alpha>0, C>0$ ***に対して 上半平面*** $\Im z\ge 0$ ***で***

$$|f(z)|\le Ce^{\alpha\,\Im z} \qquad \text{（２）}$$

が成り立つのなら、上半平面において、

$$|f(z)|\le Me^{a\Im z}$$

が成り立つ。ここで、 $a=\limsup\limits_{y\to\infty}\dfrac{\log|f(iy)|}{y}$ ***である。***

証明） $u(z)=\log|f(z)|$ とおき、定理６および上の注意を見ればよい。■

定義：ある集合上で（２） $|f(z)|\le Me^{\alpha\,\Im z}$ ***を満たす関数は指数型(exponential type）と呼ばれる。***