Koosis 先生の古典解析学４　p.17~p.１９

数学クラシックス

ペイリー・ウイナーの定理 Paley –Wiener への準備

$z \in \mathbb{C}$ ，$\varphi \in L^1[-a,b], a>0, b>0$ 　に対して、積分　$f(z)=\int_{-a}^{b} e^{i\lambda z}\varphi(\lambda)d\lambda$

を考える。$\left|e^{i\lambda z}\right| = e^{-\lambda \Im z}$ であるから、この積分は絶対収束であり、$f(z)$ は整関数 entire function である。整関数と言うのは、複素平面$\mathbb{C}$ のすべての点で解析的な関数 holomorphic function のことである。$\|\varphi\|_1 = \int_{-a}^{b}|\varphi(\lambda)|\,d\lambda$ とおく。複素平面$\mathbb{C}$の上半平面（$\Im z \ge 0$ ）で、$|f(z)| \le \|\varphi\|_1 e^{a\,\Im z}$ 、下半平面（$\Im z \le 0$ ）で$|f(z)| \le \|\varphi\|_1 e^{b|\Im z|}$ が成立しており、次の不等式がなりたつ。

$$\limsup_{y\to\infty}\frac{\log|f(iy)|}{y} \le a \qquad , \qquad \limsup_{y\to-\infty}\frac{\log|f(iy)|}{|y|} \le b$$

証明）複素平面$\mathbb{C}$の上半平面（$\Im z \ge 0$ ）において、$|f(z)| \le \|\varphi\|_1 e^{a\Im z}$ で $z = iy$ とすると$|f(iy)| \le \|\varphi\|_1 e^{ay}$、つまり、$\log|f(iy)| \le \log\|\varphi\|_1 + ay$。両辺を y でわり、$y\to\infty$ とすれば最初の不等式が得られる。下半平面（$\Im z \le 0$ ）では、$|f(z)| \le \|\varphi\|_1 e^{b|\Im z|}$ において $z = iy, y<0$ とおくと$|f(iy)| \le \|\varphi\|_1 e^{b|y|}$、つまり、$\log|f(iy)| \le \log\|\varphi\|_1 + b|y|$。両辺を$|y|$ でわり、$y\to-\infty$ とすればよい。■

上のような不等式を満たす整関数は指数型（exponential type）と呼ばれている。

ペーリー・ウイナーの定理は、上に述べた事実の逆が成り立つというもので、

任意の指数型整関数は積分表示 $f(z)=\int_{-a}^{b} e^{i\lambda z}\varphi(\lambda)d\lambda$ を持つというものである。これを証明するための予備的な定理を述べる。

前回述べた定理６系を思い出そう。

定理６の系

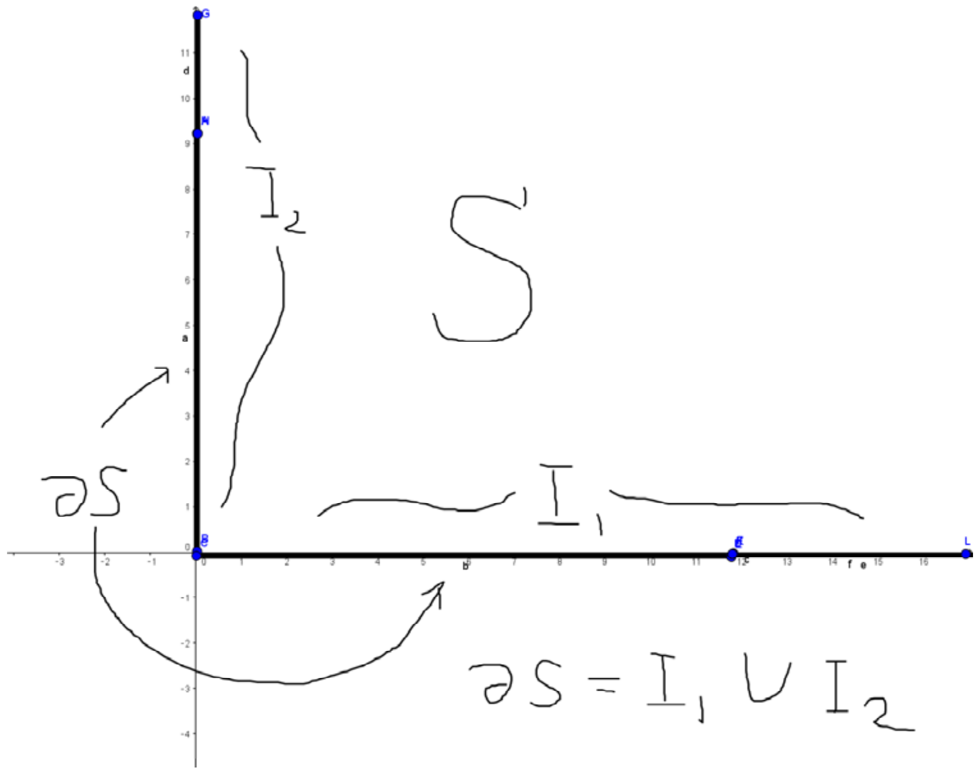
$f(z)$ を $\Im z\geq 0$ で連続、$\Im z>0$ で解析的な関数とする。さらに

$\Im z\geq 0$ において指数型 $|f(z)|\leq Ce^{\alpha|z|}$ で

実数軸上で有界すなわち $|f(x)|\leq M$,$x\in\mathbb{R}$ とすると、上半平面 $\Im z\geq 0$ で

$|f(z)|\leq Me^{a\,\Im z}$，$a=\limsup_{y\to\infty}\dfrac{\log|f(iy)|}{y}$ という不等式が成り立つ。

$f(z)$ がゼロにならなければ、$\log f(z)$ も解析的で、$\log f(z)$ の実部 $\log|f(z)|$ は調和関数となる（解析関数の実部と虚部がコーシーリーマンの偏微分方程式をみたすことの帰結）。$f(z)$ がゼロになることを考慮すると、$f(z)=0$ では $\log|f(z)|=-\infty$ とおいて、$\log|f(z)|$ は劣調和関数となる。劣調和関数は最大値の原理によりその増大度（大きさ）は**境界値の増大度**（大きさ）できまる。今の場合、境界は実数軸。あるいは上半平面を第１象限と第２象限に分けることにより、虚軸　$iy, y>0=I_2$　と実軸$=I_1$ が境界 $\partial\mathcal{S}$ となる。虚軸での大きくなり方 $a=\limsup_{y\to\infty}\dfrac{\log|f(iy)|}{y}$　*と*実軸*での大きくなり*方、$|f(x)|\leq M$ *という*　境界 $\partial\mathcal{S}=I_1\cup I_2$ の情報だけ で､上半平面 $\mathcal{S}$ での増大度が決定されてしまい　その結果 $|f(z)|\leq Me^{a\,\Im z}$，$z\in\mathcal{S}$ *という評価をもつというのがこの*定理６の系が述べていることである。



Payley-Wiener の定理は、指数型の整関数 $f(z)$ が虚軸において

$\limsup\limits_{y\to\infty}\dfrac{\log|f(iy)|}{y}=a$ ， $\limsup\limits_{y\to-\infty}\dfrac{\log|f(iy)|}{|y|}=b$ をみたしており、実軸上 $z=x$ で

$f(x)\in L^2(\mathbb{R})$ とすると $f(z)=\int_{-a}^{b} e^{i\lambda z}\varphi(\lambda)\,d\lambda$ と書けるというものである。

Payley-Wiener の定理の証明にむけて必要となる準備をする。

定理５． *原点に頂点をもち、角度が* 2γ ， $0<\gamma\le\pi/2$ *の角領域を* $\mathcal{S}$ *とし、* $u(z)$ *は* $\mathcal{S}$ *において劣調和であるとする。ただし、頂点は* $\mathcal{S}$ *にふくまれないとしておく。すべての* $\zeta\in\partial\mathcal{S}$ *において、*

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{S}\\ z\to\zeta}} u(z)\le M$$

を仮定する。ある $\alpha<\dfrac{\pi}{2\gamma}$ *と、* $u(z)\le C|z|^{\alpha}$ *となる* $C>0$ *が存在するなら、*

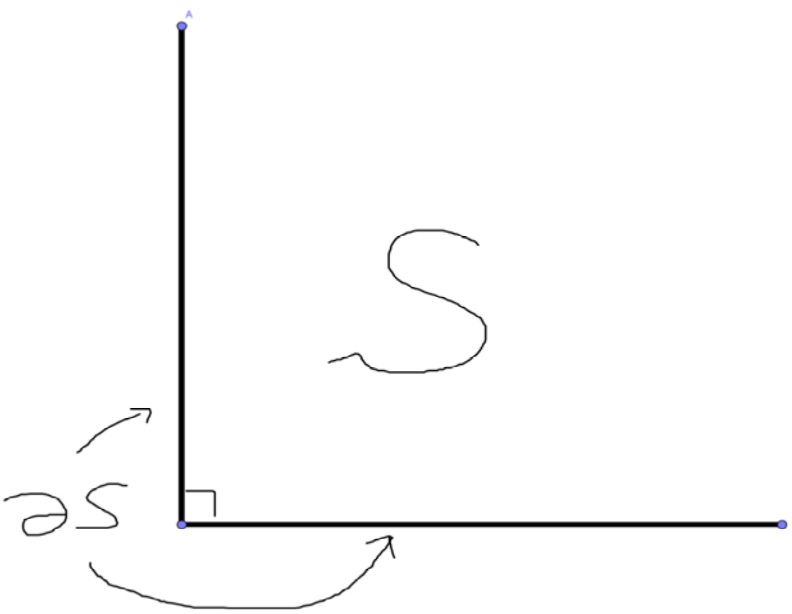
$$u(z)\le M$$

が $\mathcal{S}$ *のすべてで成り立つ。*

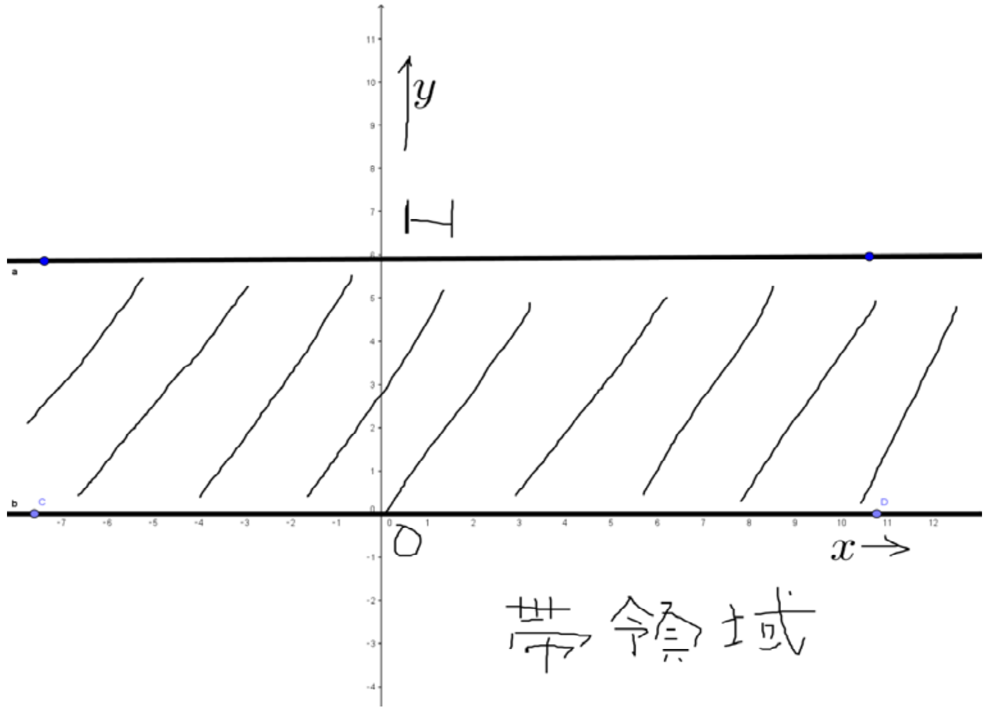
定理５はすでに述べた劣調和関数に関する定理であった。この結果を Payley-Wiener の予備定理の証明に利用できる形定理５* にしておこう。定理５で角度$\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ とおくと定理５において、$\alpha<2$ とできるが、特に$\alpha=1$ として $u(z)\le C|z|$ とできるので、定理６のあとの注意を用いると次のようになる。

定理 5*　$f(z)$ を解析的関数とする。$u(z)=\log|f(z)|$において、角領域$\mathcal{S}$ でその頂点角度を$\dfrac{\pi}{2}$ とする。$\zeta\in\partial\mathcal{S}$ において、ある定数$A>0$ により $\limsup\limits_{\substack{z\in\mathcal{S}\\ z\to\zeta}}\log|f(z)|\le A$ *が成り立つと仮定する。*$\log|f(z)|\le\log C+\beta|z|$（$f(z)$が指数型$|f(z)|\le Ce^{\beta|z|}$ ）であるなら、

$\mathcal{S}$ *のすべての範囲で* $\log|f(z)|\le A$が*が成り立つ。*



今から述べる Paypey-Wiener 予備定理７は下図の様な帯領域での定理である。



定理 7（Payle-Wiener 予備定理）　$f(z)$ を $\Im z>0$ で解析的、$\Im z \geq 0$ で連続で指数型とする。$H>0$ を任意の値として固定しておく。

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

とするとき、帯領域　$\{x+iy\ ;\ 0\leq y\leq H\}$ で一様に

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x+iy)=0$$

が成り立つ。

証明）$f(z)$ は指数型であるから $\limsup_{y\to\infty}\dfrac{\log|f(iy)|}{y}=a$　となる $a>0$ がある。

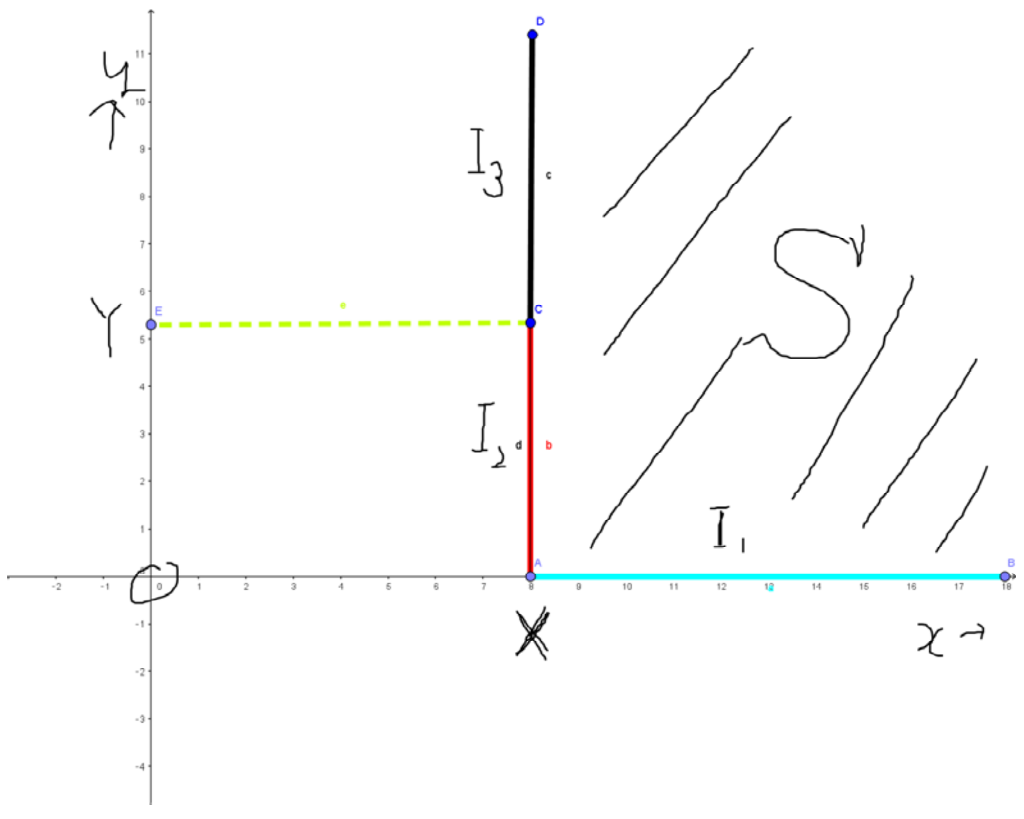
$b>a$ となるような b を任意に選んでおく。$A>0$ を任意に固定しておく。

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ であることから、十分おおきな $X>0$ を選んで、$x\geq X$ をみたすすべての x （下図において $z=x\in I_1$ ）について　$|f(x)|\leq A$　を成立させることができる。他方　$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ であることから、ある正数 $M>0$ があり、すべ

ての $x\in\mathbb{R}$ で $\left|f(x)\right|\le M$ が成り立つ。定理６の系より、$\Im z\ge 0$ で $\left|f(z)\right|\le Me^{a\,\Im z}$ が成立している。つまり、$\Im z\ge 0$ で $\left|e^{ibz}f(z)\right|\le Me^{(a-b)\,\Im z}$ が成立する。$b>a$ であるから、$Y>0$ を十分大きくとり、$\Im z\ge Y$ （下図において $z=X+iy\in I_3$ ）なら $e^{(a-b)\Im z}\le\dfrac{A}{M}$ という不等式を満たすようにできる。すなわち、$\Im z\ge Y$ なら $\left|e^{ibz}f(z)\right|\le Me^{(a-b)\,\Im z}\le A$ となっている。いま、$\mathcal{S}=\left\{x+iy; x>X\text{ かつ }y>0\right\}$ という開領域を考える。下図のように $\mathcal{S}$ の境界 $\partial\mathcal{S}$ を３つの部分に分ける：

$\partial\mathcal{S}=I_1\cup I_2\cup I_3$ 、$I_1=\left\{z=x+iy; x>X, y=0\right\}$ ，$I_2=\left\{z=x+iy; x=X, 0\le y<Y\right\}$，

$I_2=\left\{z=x+iy; x=X, Y<y\right\}$。 繰り返すと、$I_1$ 上で $\left|e^{ibz}f(z)\right|=\left|f(x)\right|\le A$、$I_3$ 上で $\left|e^{ibz}f(z)\right|\le A$ となっていた。



ここで、、$g_K(z)=\dfrac{z}{z+iK}e^{ibz}f(z)$ とおく。$\left|\dfrac{z}{z+iK}\right|\le 1$ であるから、今示した

$\left|e^{ibz}f(z)\right|\le A, z\in I_1\cup I_3$ は、$\left|g_K(z)\right|\le A$, $z\in I_1\cup I_3$ となる。I_2 において $g_K(z)$ を

評価しよう。定理の仮定 $f(z)$ が指数型 $\left|f(z)\right|\le Ce^{\beta|z|}$ の形をもっているとす

ると $z\in I_2$ では、すなわち、$z=X+iy, 0\le y\le Y$ では、$\left|f(z)\right|\le Ce^{\beta|X+iy|}\le Ce^{\beta(X+Y)}$

であり、$\left|\dfrac{z}{z+iK}\right|=\left|\dfrac{X+iy}{X+i(y+K)}\right|\le\dfrac{X+Y}{\sqrt{X^2+K^2}}$ であるから K を十分大きくして、

$0\le y\le Y$ において、$\left|g_K(X+iy)\right|\le A$ とできる。結局、$g_K(z)$ は

$z\in\partial\mathcal{S}=I_1\cup I_2\cup I_3$ において $\left|g_K(z)\right|\le A$ を満たすことが示された。$\left|\dfrac{z}{z+iK}\right|\le 1$ を用

いて $\left|f(z)\right|\le Ce^{\beta|z|}$ を考慮すると、$g_K(z)$ も $f(z)$ と同じ指数型（$z=-iK$ では極

を持つが上半平面では解析性はくずれない） $\left|g_K(z)\right|\le Ce^{\beta|z|}$ をもつので定理 5*

を応用すると、境界 $\partial\mathcal{S}$ でなりたつ不等式 $\left|g_K(z)\right|\le A$ がすべての $z\in\mathcal{S}$ で成立

することがわかる。そこで、$z=x+iy$ の $0\le y\le H$ 、$x\ge X$ では

$\left|f(z)\right|=\left|\dfrac{z+iK}{z}\right|\left|e^{-ibz}g_K(z)\right|\le\left|\dfrac{z+iK}{z}\right|e^{bH}A$ という評価ができる。

$1\le\left|\dfrac{z+iK}{z}\right|=\left|\dfrac{x+i(y+K)}{x+iy}\right|\le\dfrac{x+Y+K}{x}$ において $x\to\infty$ とすると $0\le y\le Y$ の y につ

いいて一様に $\left|\dfrac{z}{z+iK}\right|\to 1$ となるので $\left|f(z)\right|=\left|\dfrac{z+iK}{z}\right|\left|e^{-ibz}g_K(z)\right|\le\left|\dfrac{z+iK}{z}\right|e^{bH}A$ に

おいて $x\to\infty$ とすると $0\le y\le H$ に対して一様に $\left|f(z)\right|\le e^{bH}A$ が成立している

いま、任意に小さい $\varepsilon>0$ とすると、$e^{bH}A<\varepsilon$ となるように A をとれる。
任意に小さい $\varepsilon>0$ に対して $x\to\infty$ とすると $0\le y\le H$ に対して一様に

$\left|f(x+iy)\right|\le\varepsilon$ となった。つまり、$\limsup_{x\to 0}\left|f(x+iy)\right|=0$。これは、$\lim_{x\to 0}\left|f(x+iy)\right|=0$

でもある。$x\to-\infty$ については、z の代わりに $-z$ として、上の図 $\mathcal{S}$ の代わり
に $-\mathcal{S}$ で全く同様の評価ができる。証明おわり。■