Lecture 16

これまで、距離$d(v,w)$ を変えない$\mathbb{R}^n$ のユークリッド運動群（合同変換群）

$G=\mathbb{R}^n\cdot O(n)$を見てきた。Γ をG の有限部分群とするとき、Γ はある点p を

固定する、したがって、$\Gamma\subset O(n)=G_0$（０を固定点に持つもの）の有限部分群

の共役となる（正確には $\Gamma^*=t_p^{-1}\Gamma t_p$ とおくと、$\Gamma^*=t_p^{-1}\Gamma t_p\subset G_0=O(n)$であるから

$\Gamma\cong\Gamma^*$ つまり Γ を調べるにはΓ^* の場合を調べればよい)。これは、$n=2$ の場合は、平面上の正多角形の形は変えず頂点を他の頂点に移す運動群である。有限群

Γ （$\Gamma\subset O(2)$）の部分群を $\Gamma_+=\{\gamma\in\Gamma:\det\gamma=1\}$とする。このとき$\Gamma$はつぎの２

つのタイプに分かれる。

１）回転対称のみからなる cyclic group C_n 巡回群

２）回転対称と鏡映からなる Dihedral group D_{2n} 正２面体群

注意）これまで記号でD_nは位数n の正２面体群をあらわした、つまりn はい

つも偶数。しかし、別の教科書たとえば、Aritin の本などでは、D_nは我々のD_{2n}

の意味であるので注意が必要である。

1）$\Gamma=\Gamma_+$ 位数$n\geq 1$、$rot(\theta)$を生成元とする周期的運動、θ は可能な回転角の

うち最小のものをとる。（最小のθとることによりΓ は$rot(\theta)$ の整数倍の角の

回転としてすべてが表わされる）。

２）

$\Gamma \triangleright_2 \Gamma_+$

↑

cyclic

of order

n

位数$2n$ の正２面体

$r\,rot(\theta)r^{-1}=rot(\theta)^{-1}$ 、$r\in\Gamma\setminus\Gamma_+$ 、

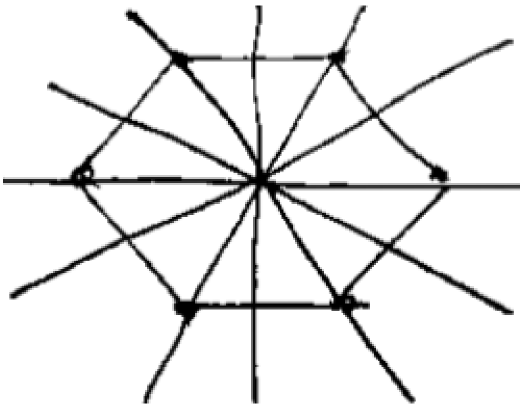
$r^2=1$ （ r は鏡映）

という関係がある。

例：　G の部分群による正多角形の上の操作(action）。

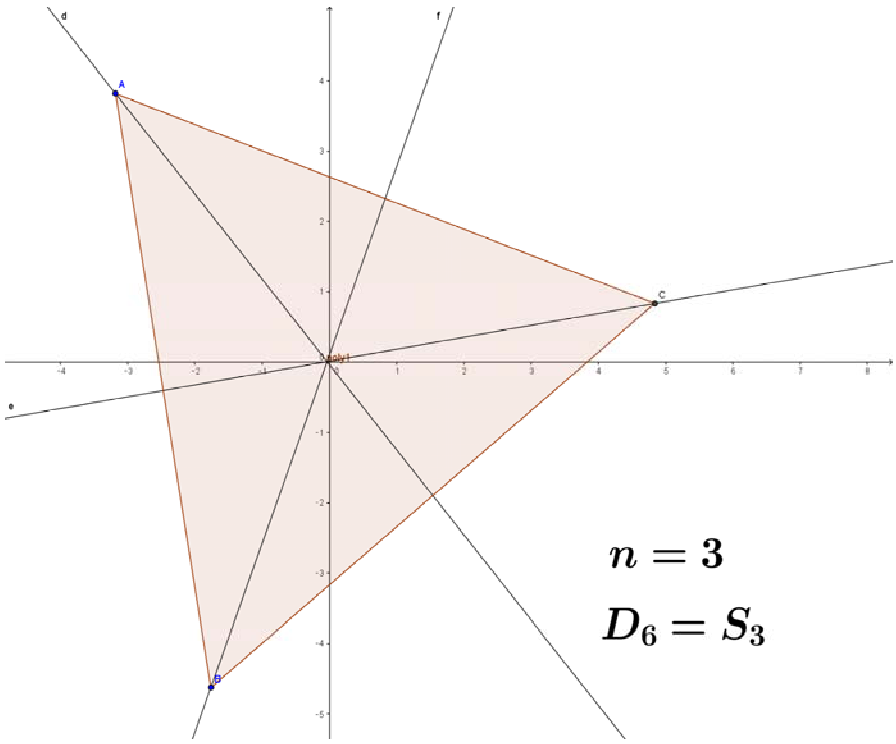
$n=6$ 正 6 角形　regular hexagon は正 2 面体群 D_{12} の操作で 6 個の回転

と 6 種類の直線についての 6 個の鏡映から構成される。
（相対する頂点を結ぶ直線 3 本、相対する辺の中点と中点を通る直線 3 本
これらの間にある共役関係をあとで詳しく調べる）



$n=6$

$n=3$ の場合正 3 角形は 3 個の回転 $\Gamma_+ = \left\langle rot\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\rangle$ および(頂点と辺の中心を結んでできる）3 種類の直線についての鏡映から構成される。



したがってD_{2n} において鏡映のタイプは、n が偶数の場合、奇数の場合分かれ

n 奇数のときは$\Gamma - \Gamma_+$ 互いに conjugete な同じ種類のn個のもの

n 偶数のときは互いに conjugate な$\frac{n}{2}$ 個と互いに conjugate な互いに

conjugate な$\frac{n}{2}$個のもの　の 2 つの種類のものとなる。

D_4 は Klein の 4 群となる。D_{2n} ，$n \geq 3$ では非可換である。

G の離散部分群
（これは、有限部分群Gのの一般化である。）
$G = \mathbb{R}^2 \cdot O(2)$において、離散部分群$\Gamma$ は、Γが任意に小さい回転や平行移動を

含まない部分群と定義する。つまり、$\exists \varepsilon > 0$ に対して、$t_b \in \Gamma \ \Rightarrow |b| \geq \varepsilon$ であり、

$rot(\theta) \in \Gamma \ \Rightarrow \ |\theta| \geq \varepsilon$が成立している。したがって、有限部分群は必然的に離散

部分群でもある。しかし、この逆は成り立たない。
$|\theta| \geq \varepsilon$ということは、$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が単位行列$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ にいくらでも近づくようなことはない。

例　$b \neq 0$　$b \in \mathbb{R}^n$ に対して$\Gamma = \ \ t_b$ を生成元とする巡回群Γ は、$G = \mathbb{R}^n \cdot O(n)$

において、無限の離散部分群である。

さて、$G = \mathbb{R}^2 \cdot O(2)$の離散部分群$\Gamma$の分類を始めよう。$L = \Gamma \cap \mathbb{R}^2$とする。

①　$L = \{t_b \in \Gamma\}$の場合　$\overline{\Gamma} = \Gamma / L = 1$。

② $\bar{\Gamma} = \mathrm{Im}\, of\ \Gamma\, by\ action\ G$ 第１同型定理より $O(2) \simeq G/\mathbb{R}^2$ であり、

$\Gamma/L \to G/\mathbb{R}^2$ となる自然な写像がある。（ここで同型定理とは　群準同型

$\varphi : G \to G'$ に対して、$G/\ker\varphi \cong \varphi(G)$ なる同型の成立をいう）

第１段：L としてどんな可能性があるだろう。３つある。

① $L = \{0\}$ 　この場合はΓ は有限部分群で、$\bar{\Gamma} = \Gamma$

② $L = \mathbb{Z}b$ ，$b \neq 0$，$b \in \mathbb{R}^2$

③ $L = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ で$\{a,b\}$ は$\mathbb{R}^2$ の基底。この場合Lは”lattice”あるいは格子とよばれる。

①、②、③　を順に調べていこう。

観察：$b, b' \in L$ とすると、$b - b' \in L$ であるから、ある一定数$\varepsilon > 0$ に対して$|b - b'| \geq \varepsilon$が成り立つので、ベクトルは互いに近づけない。

問題）上の可能性①②③しかありえないのか？

答え） $L = \{0\}$のときは、①の場合になるので、$L \neq \{0\}$を仮定する。

L に含まれるベクトルがある固定された直線$l \in \mathbb{R}^2$ の上にある。

b をL に含まれるベクトルのうち原点$0 \in \mathbb{R}^2$ 　に一番近いものとする。$t_b \in \Gamma$

$\Rightarrow |b| \geq \varepsilon$ より$b \neq 0$ である。いま、$b' \in L$ をとり　$b' = nb + r_0 b$ と表してみる。

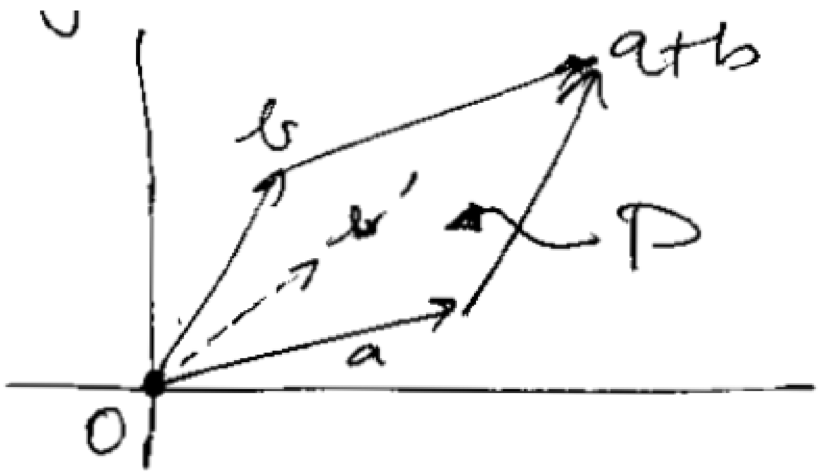
ただし、$n \in \mathbb{Z}$ 、$0 \leq r_0 < 1$ 。もし、$r_0 \neq 0$ とすると、$r_0 b = nb - b'$と書き直して、

$nb - b' \in L$ より$r_0 b \in L$ 。しかも$|r_0 b| < |b|$ となり、b より０に近い点$r_0 b \in L$があることになり仮定に矛盾が生じる。したがって$b' = nb \in \mathbb{Z}b$ 。これは、$L = \mathbb{Z}b$ を意味し、②の場合となる。

そこで、次にL に含まれるベクトルが直線上にないと仮定する。このとき、Lは$\mathbb{R}^2$ の基底ベクトルを含む。これを$\{a,b\}$ とする。一般性を失うことなく（適

当に長さを変えて、a は$\mathbb{R}a \cap L$ に属する最小長さのベクトル、b は$\mathbb{R}b \cap L$ に属する最小長さのベクトルと仮定できる。

補題　S を有界な$\mathbb{R}^2$ の部分集合とする。このとき、$S \cap L$ は有限集合である。
証明）　$S \cap L$ が無限集合であると仮定する。収束する部分列が取れる。これはコーシー列となるが、しかしL 上の点はコーシー列を作れない（上の観察を見よ）。■、
この補題を次の図に応用する。



補題により$P \cap L$ の内部には有限個しか点がない。したがってb' をa に最も近い点とするとき、b をb' と置き換えて新たに平行四辺形P をつくることができる。このようにして、平行四辺形内部には点がないようにできる。 その結果次を得る。

命題　$L = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ である。

証明）任意のベクトル$v \in \mathbb{R}^2$ に対して$v = ra + sb$ （$r, s \in \mathbb{R}$ ）で、$ra = (na + r_0 a)$ 、

$sb = mb + s_0 b$ であり、$n.m \in \mathbb{Z}$ 、$0 \le r_0, s_0 < 1$ となるようにr_0, s_0 を選んでやる。

$na + mb \in L$ であり、$v \in L$ とすると、$r_0 a + s_0 b = v - na - mb \in L$ である。しかし、

$r_0 a + s_0 b$ はP にも属さなければならない。$0 \le r_0, s_0 < 1$ であるから、$r_0 = s_0 = 1$ で

なければP の内部にあることになる。平行四辺形の内部には点が無いようにa,b を定めたのであったから、$r_0a+s_0b=0$、あるいは$v-na-mb=0$。つまり任意の$v\in L$は$v\in Za+Zb$ を満たすことになる。■

つぎに、$O(2)$ の中でのΓ の像$\bar{\Gamma}$ について考える。

補題　$\bar{\Gamma}$は部分群$L\subset O(2)$ を保存する

証明）$b\in L$ 　のとき、すなわち、$t_b\in\Gamma$ のとき、 $\bar{\gamma}\in\bar{\Gamma}$は$\gamma\in\Gamma$ 　に持ち上げられる。Γ において$\gamma t_b\gamma^{-1}$ 　を考える。 $\gamma t_b\gamma^{-1}$は$\bar{\gamma}(b)$ による平行移動すなわち、共役の一般公式より$\gamma t_b\gamma^{-1}=t_{\bar{\gamma}(b)}$となりこれは、$\bar{\gamma}(b)\in L=\Gamma\cap\mathbb{R}^2$を意味する。

（$\gamma(v)=Av$　$t_b(w)=w+b$，$\gamma^{-1}(v)=A^{-1}v$，　$\gamma t_b\gamma^{-1}(v)=\gamma t_b\left(A^{-1}v\right)=\gamma\left(A^{-1}v+b\right)$

$=A\left(A^{-1}v+b\right)=v+Ab=t_{\bar{\gamma}(b)}$）■

もし、$L=\{0\}$のときは、ある$n\geq 1$ について、$\bar{\Gamma}=C_n$ または、$\bar{\Gamma}=D_{2n}$でいずれの場合も可能性がある。しかし、場合③のときは$L=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}b$（ a,b は一次独立）であるが、次の命題が成立する。

命題　$\bar{\Gamma}=C_n$ または、$\bar{\Gamma}=D_n$が成立するのは$n=1,2,3,4,6$ の場合に限られる（すなわち、$\#\bar{\Gamma}\leq 12$ ）である。

証明）$\mathbb{R}^2\lhd G$ であり、$G/\mathbb{R}^2\cong O(2)$ であった。$\Gamma\subset G$ であり$G\to G/\mathbb{R}^2$ の対応のうちΓ に制限した結果が$\Gamma\to\bar{\Gamma}$ であったので、$\bar{\Gamma}$ はΓ のうち回転対称部分をあらわしている。そこで、$A\in\bar{\Gamma}$ を回転とする。A の位数は 1,2,3,4,6 のいずれかであることを以下に示す。A の固有多項式をX^2-tX+1 とすると、$t=trA$ である。ところが、$t=trA$は整数$tr(A)\in\mathbb{Z}$。というのは行列A を基底$\{a,b\}$ で表したときA の各要素は整数である。$z=e^{i\theta}$ とすると

$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ より $t=trA=2\cos\theta=z+\overline{z}$ となっており、

$X^2-tX+1=(X-z)(X-\overline{z})$ は複素根か $\theta=0$ のときは重根。したがって、

$t^2-4\leq 0$ を得る。そして、$t=\pm 2$ （このとき位数　3,6），$t=\pm 1$（この時位数 1 または２）、あるは $t=0$（この時　位数　4)の場合となる。