Lecture 14

前回

F　：体　field

$GL_n(F)$　群$(A,\cdot)$　　ベクトル空間　F^n　の自己同型

$O_n(F)$　　内積$\langle v,w\rangle=\sum_{1}^{n}v_iw_i$　を変えない　$GL_n(F)$の部分集合

$SO_n(F)\subset O_n(F)\subset GL_n(F)$

$O_n(F)=\{A:A^tA=I\}=\{A:A^t=A^{-1}\}$　と書ける。

$A\in O_n(F)\ \Rightarrow\ (\det A)^2=+1$

Fにおいて$X^2-1=(X+1)(X-1)=0$　は高々２つの根をもつ　$\Rightarrow\det A=\pm1$　。

もし、Fにおいて$1\neq-1$　の場合、

$$\underset{\{A\,:\,A^t=A^{-1}\ \&\ \det A=+1\}}{\overset{}{SO_n(F)}}\ \underset{2}{\triangleleft}\ O_n(F)$$

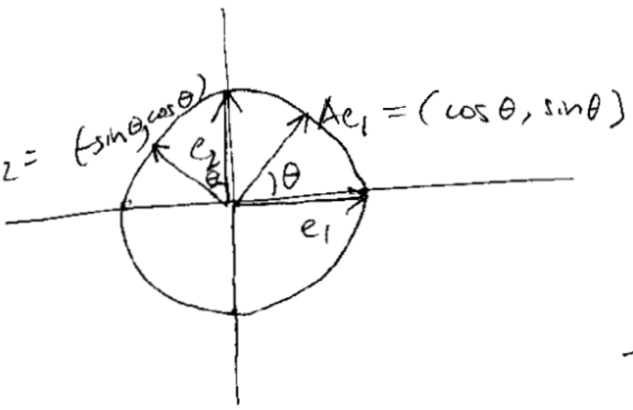
$$SO_n(F)=\{A : A^t=A^{-1}\ \&\ \det A=+1\}$$

という図式が成り立つ。

$F=\mathbb{R}$の場合、A　が内積$\langle v,w\rangle$を変えないとき、そのノルムも変えない。ノルムは　$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}=\sqrt{\sum_{1}^{n}v_i^2}\geq0$をみたす、さらにこの場合　$\cos\theta=\dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}$　から決まる角度θも変えない。$0\leq\theta\leq\pi$

一般の F において、$A \in O_n(F)$ の固有値 λ に属する固有ベクトルを v とすると、$Av = \lambda v$ で $\langle v, v\rangle \neq 0$ であるから、A が内積を保存することを使うと $\langle v, v\rangle = \langle Av, Av\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle$ を得て、両辺を $\langle v, v\rangle \neq 0$ で割ると $\lambda^2 = 1$ すなわち、$A \in O_n(F)$ の固有値は $\lambda = \pm 1$ の２つある。

What do transformations A in $SO(2)$ look like?



$\|e_1\| = \|e_2\| = 1$
$\langle e_1, e_2\rangle = 0$

$\|Ae_1\| = 1$,
$\|Ae_2\| = 1$
$Ae_1 \perp Ae_2$
$\det A = +1$.

$$A = \begin{array}{cc} Ae_1 & Ae_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \end{array} = \mathrm{rot}(\theta) \quad \left(\text{rotation by } \theta.\right)$$

$SO(2) = SO_2(\mathbb{R})$ に属する行列 A はどのように見えるだろうか？$e_1 = (1,0)$ ，$e_2 = (0,1)$ とすると、長さを変えないんで Ae_1 は円周上にあり、上の図形で円周上の点を x, y 座標を極座標で書くと $Ae_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$ を得る。$e_1 = (1,0)$ ，$e_2 = (0,1)$ は直交しているから、Ae_1 と Ae_2 は直交する。つまり円周上の

$Ae_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$ と $Ae_2 = (\sin\theta, -\cos\theta)$ の２点が候補に挙がるが、A の行列表現で $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ の二つの候補のうち、$\det A = +1$ という条件から、あとの候補は捨てられる。したがって $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が $SO(2)$ に属する行列ということになる。つまり、$SO(2)$ という群は平面上のベクトルを反時計回りにある角度 θ だけ回転する変換から成っている。

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を $rot(\theta)$ と書くことにすると、

$$rot(\theta) \circ rot(\psi) = rot(\theta + \psi)$$

のように、積演算は角度の和となる。したがってこれは可換（アーベル）群である。いま、次のような同型 f を考えることができる。

$$SO(2) \xrightarrow{f} \{z \in \mathbb{C}^{\times} : |z| = 1\}$$

$$A = rot(\theta) \longmapsto z = e^{i\theta} \text{ "} = f(e_1) \text{"}$$

注意：$SO(2)$ は可換群だが、$O(2)$ は可換群でない。

それでは、$O(2) - SO(2)$ に属する変換 A とはどんなものだろう？

つまり $A^t = A^{-1}$ をみたし、$\det A = -1$ の形状はどんなものだろう？

<u>主張：</u>そのような A は２つの互いに直交する固有値1 と-1 に属する固有ベクトルv_1, v_2 からなる。$Av_1 = v_1$, $Av_2 = -v_2$ そして、基底(v_1, v_2) に関する行列は

$A = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

証明） A の固有方程式は $X^2 - Tr(A)X + \det A = X^2 - Tr(A)X - 1 = 0$ である。この方程式の根は実数である。と言うのは複素根を持つとすると実数係数の２次方程式の２根は共役となる。すなわち、$z, \overline{z}$ をその２根とすると

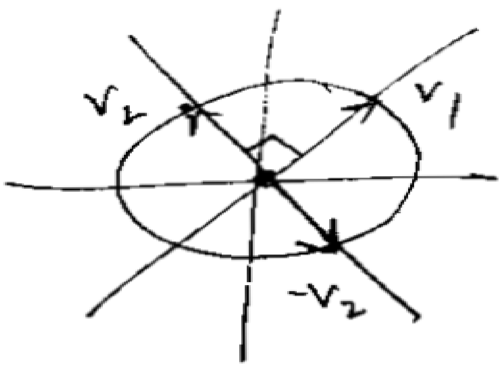
$X^2 - Tr(A)X + \det A = (X - z)(X - \overline{z})$ より、$\det A = z\overline{z} > 0$ となり $\det A = -1$ と矛盾してしまう。そこで、固有方程式の２実根（固有値）を λ_1, λ_2 とおくと、$\lambda_1\lambda_2 = -1$ を満たす。 ところで、A の固有値 λ は $\lambda^2 = 1$ を満たす０（A は長さを変えない変換であるから、固有値 λ と固有ベクトル $v \neq 0$ にたいして、

$(v,v) = (Av, Av) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 (v,v)$ より）。したがって、$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ となり、

$Av_1 = v_1$, $Av_2 = -v_2$ および $A = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ がわかる。■

$Av_1 = v_1$, $Av_2 = -v_2$ における固有ベクトルは互いに直交している。実際、

$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Av_1, Av_2 \rangle = \langle v_1, -v_2 \rangle = -\langle v_1, v_2 \rangle$ より、$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ $v_1 \perp v_2$ 。結局 A の幾何学的な意味は、v_1 を延長した直線 $\mathbb{R}v_1$ につての鏡映であることがわかる。したがって $A^2 = I$ 。$(reflection)\circ(reflection) = 1$



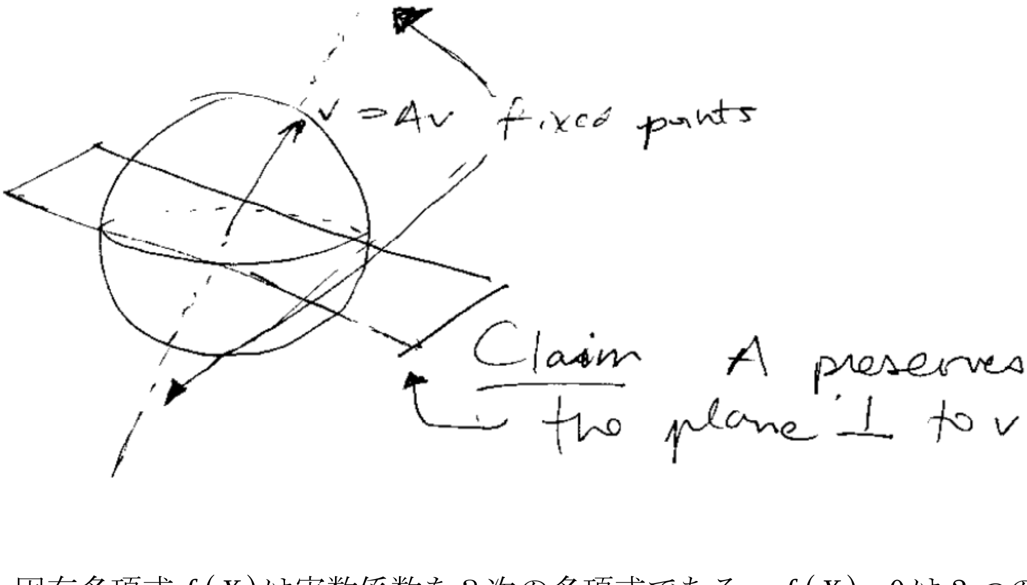
reflection
around line
$\mathbb{R}v_1$

Note: $Refl(v_1) \circ Refl(v_2) = Rot(\theta)$.

鏡映を２回行うことは、ある角度の回転になる。このことは　$\det A = \det B = -1$ のとき $\det(AB) = \det A \cdot \det B = -1 \cdot -1 = 1$ となることからもわかる。

<u>オイラー（Euler）　の定理</u>

> $A \in SO(3)$ は固有値 $+1$ を持つ。したがってある $v \in \mathbb{R}^3$ が存在して、$Av = v$ を満たす。（オイラーの言い方：$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を保存する運動は、その運動が向きを変えないとき、回転軸をもつ。３次元空間 $\mathbb{R}^3$ で円 S^2 を動かさない運動はある軸 v の周りの回転である。）



証明）固有多項式 $f(X)$ は実数係数を３次の多項式である。$f(X) = 0$ は３つの根をもつが、可能性としては、すべて実根 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ の場合と、ひとつ実数根 λ 、残り２つは互いに共役な複素根 $z, \bar{z}$ の場合である。実数係数３次多項式は連続関数で、$x \to -\infty$ で $f(x) \to -\infty$ 、$x \to \infty$ で $f(x) \to \infty$ となり、x を $(-\infty, \infty)$ の間を増加させていくとどこか x で $f(x)$ の値がマイナスからプラスへ変わる、つ

まり少なくとも１個は $f(X)=0$ の実数根がなければならない（中間値の定理）からである。また、A は $SO(3)$ の要素であるから長さは変えず、固有値の絶対値は１である（$\langle v,v\rangle=\langle Av,Av\rangle=\langle zv,zv\rangle=|z|^2\langle v,v\rangle$ ）。したがってすべて実根 $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ の場合 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det A=1$ で $\lambda_i=\pm1$ 、$i=1,2,3$ であるか、 ひとつ実数根、残り２つは互いに共役な複素根 $\{\lambda,z,\overline{z}\}$ の場合 $\lambda z\overline{z}=\det A=1$、$z\overline{z}=1$ いずれの場合もこれらの条件から、$\lambda=1$ という固有値を持つことが結論される。■

<u>命題</u>　A は v に直交する平面を保存する。ただし、v はオイラーの定理で存在が保証された、固有値１に属する A の固有ベクトル（$Av=v$）

証明）

w を v に直交する平面上のベクトルとするとき、Aw がやはり v に直交することを言えばよい。$\langle v,w\rangle=0$ で A が内積を変えないことから、$\langle Av,Aw\rangle=0$ 。しかし、$Av=v$ より、$\langle v,Aw\rangle=0$ が言えた。■

e_1,e_2 を v に直交する平面の基底とする。その結果 v,e_1,e_2 を基底とする A の表示は

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} v & e_1 & e_2\end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}\end{array}$$

という形になるが、$\det A = +1$ であるから右下の 2×2 （四角い部分）の部分行列の行列式も $+1$ であり、$SO(2)$ の要素であることがわかる。結局 A は直線　$\mathbb{R}v$ のまわりの角度 θ の回転 $rot(\theta)$ となる。

<u>剛体運動(rigid motion)</u>

$\mathbb{R}^n$ における 2 点 v, w 間の距離 $d(v,w) = \|v-w\|$ を変えない $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の運動は剛体運動と呼ばれる。ここで、運動とは $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の関数のことである。

<u>命題</u>　m を剛体運動とする。いま、$m(0)=0$ を満たすとき、m は $O(n)$ に属する線形変換である。

証明）$\langle m(v), m(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ を示せばよい。

$$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle \ ,$$

$$\|v-w\|^2 = \|m(v)-m(w)\|^2 = \|m(v)\|^2 + \|m(w)\|^2 - 2\langle m(v), m(w)\rangle,$$

であり、 $\|v\|^2 = \|m(v)\|^2$,　$\|w\|^2 = \|m(w)\|^2$ を用いれば、$\langle m(v), m(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ がわかる。∎

$O(n) \subset G$ ="剛体運動の群" が言えた。ほかに"剛体運動の群" G の部分群として、ある $b\in\mathbb{R}^n$ についての b だけの移動(translation) がある：$t_b(v) = v + b$ 。

移動の合成は　$t_b \circ t_{b'} = t_{b+b'}$ 。

実は剛体運動の群 G について次のことを示すことができる。

G = The group of rigid motions

$= \underbrace{\mathbb{R}^n \cdot O(n)}$

どのような剛体運動も一意的に移動と $O(n)$ の要素との合成と書ける。

注意：この $\mathbb{R}^n$ のコピーは G の正規部分群である。