Lecture 15

距離$d(v,w)=\|v-w\|$ を変えない運動 $m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ の群G 、すなわち

$\forall v,w\in\mathbb{R}^n$ に対して、$d(v,w)=d(m(v),m(w))$ を満たすm が作る群を剛体運動群と呼んだ。平行移動(translation) $m=t_b(v)=v+b$ が作る群は剛体運動群の部分群であり

$(\mathbb{R}^n,+)$ と同型である。と言うのは平行移動は$b\in\mathbb{R}^n$ によってきまり、異なるb には異なる平行移動がある(全単射)からである。そして

> 一般の剛体運動群G は、平行移動と原点を動かさない運動の合成で$G=\mathbb{R}^n\cdot G_0$ という形をしている。つまりここで、G_0 は$m(0)=0$ をみたす$m\in G$ で成る部分群である。

証明) $m(0)=b$ とする。このとき、$(t_{-b}\circ m)(0)=0$ となり、$t_{-b}\circ m$ は、原点0 を動かさない剛体運動で $t_{-b}\circ m\in G_0\cong O(n)$ である直交変換の群に属する。

加群として$t_b\simeq(\mathbb{R}^n,+)$は剛体運動の部分群であるが、他方$G_0$ は$O(n)$ と考えられる。以下$m\in G_0$ とする。 距離を変えない$\Rightarrow$ 内積を保存。なぜなら

$d(v,w)^2=d(v,0)^2+d(w,0)^2-2\langle v,w\rangle$ および

$d(m(v),m(w))^2=d(m(v),m(0))^2+d(m(w),m(0))^2-2\langle m(v),m(w)\rangle$

から、$\langle m(v),m(w)\rangle=\langle v,w\rangle$ が示される 。 m が線形変換であることは次のように説明される。$e_1,\cdots,e_n$ を$\mathbb{R}^n$ における標準的な基底(正規直交)とする。$\langle e_i,e_i\rangle=1$,

$\langle e_i,e_j\rangle=0,i\neq j$ 。このとき、m が内積を変えないことから、$m(e_1),\cdots,m(e_n)$はこれとは別の$\mathbb{R}^n$ における正規直交基底を構成する。A を$O(n)$ の要素で$m(e_1),\cdots,m(e_n)$を列ベクトルに持つものとする。

$$A=\begin{pmatrix} m(e_1) & \cdots & m(e_n) \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

$$A^tA=I$$

実は、$m=A$ である。これを示すために、$m'=m\circ A^{-1}\in G_0$ を考える。$m'(e_i)=e_i$ がおのおの $i=1,\cdots,n$ について成り立つ。その結果任意の $v\in\mathbb{R}^n$ について $m'(v)=v$ となってしまう。それは、ベクトル $m'(v)$ の第 i 要素は $\langle m'(v),e_i\rangle$ だが、$m'(e_i)=e_i$ の関係から $\langle m'(v),e_i\rangle=\langle m'(v),m'(e_i)\rangle=\langle v,e_i\rangle$ となり $m'(v)$ の第 i 要素と v の第 i 要素は等しい。各要素が等しいことから $m'(v)=v$ が言えた。つまり、$m'=id$ であり $m'=m\circ A^{-1}=id$ が言えるがこれは $m=A$ にほかならない。また、$A^tA=I$ となっている理由は上の図で A^t の i 行目は行ベクトル $m(e_i)$ でありと A の j 列目は $m(e_j)$ となっており A^tA の (i,j) 要素は $\langle m(e_i),m(e_j)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle$ となるので、$A^tA=I$ が成り立つ。■

結局 $G=\mathbb{R}^n\cdot G_0$ は $t_bv=v+b$ と、直交行列 A をもちいた Av との合成で

$m(v)=A(v)+b$ となる。これを (b,A) とあらわすと、運動群の合成は $b,b',v\in\mathbb{R}^n$ 、

$A,A'\in O(n)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(b, A)\cdot(b', A')(v) \\
&= (b, A)(A'v + b) \\
&= A(A'v + b') + b \\
&= AA'(v) + (A(b') + b) \\
&= (b + A(b'), AA')(v)
\end{aligned}
$$

となる。したがってG は$\mathbb{R}^n$ と$O(n)$ の積ではなく、むしろ<u>曲げられた積</u> twisted product である。

$$
\left.\begin{aligned}
f : G &\longrightarrow O(n) \\
(b, A) &\longmapsto A
\end{aligned}\right\}
$$

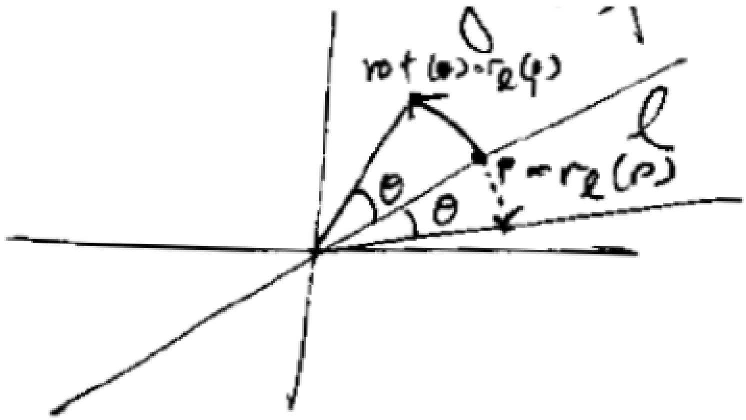
は全射でその核 kernel は $\mathbb{R}^n \simeq \{(b, I)\}$ 。 これは上の図の写像 f の核 $\ker f = (b, I)$ となっていることから正規部分群である（一番下、章末の補注3を見よ）。 ここで、$(b, I)(v) = v + b = t_b(v)$ である。実は、$n = 2$ の場合でさえ十分豊富な理論を得る。

つまり、$G = \mathbb{R}^2 \cdot O(2)$ に対して、$G_0 = O(2) = SO(2) \cup SO(2) r_l$ と書ける。ここで、

$SO(2) r_l$ は原点を通る直線に関しての位数2の鏡映たちである。回転の鏡映に関する共役はある回転になる。つまり、$r_l^2 = 1$ すなわち $r_l^{-1} = r_l$ をつかうと

$r_l \circ rot(\theta) \circ r_l^{-1} = r_l \circ rot(\theta) \circ r_l = rot(\theta')$ であり、この θ' をもとめるためには次のような図

を描く。直線l 上にある原点以外の点p をとる。この場合$r_l(p)=p$ である。これをθ だけ回転した点に再びr_l を施すとp をl に関して鏡映をとったのと逆の位置にくる。すなわち、$r_l \circ rot(\theta) \circ r_l(p) = rot(\theta')(p)$ は$\theta' = -\theta$ が図からわかる



結局、$r_l \circ rot(\theta) \circ r_l^{-1} = rot(-\theta) = rot(\theta)^{-1}$ となる。

この関係式を頭に入れておこう。すなわち角θの回転の鏡映 r_l に関する共役は角度$-\theta$の回転（回転θの逆）になる。上に述べたことより、$G_0 = O(2)$ は$SO(2)$ と任意に固定した鏡映でうまく表現できる。写像

$$G = R^2 \cdot O(2) \longrightarrow O(2) \xrightarrow[\det]{} \{\pm 1\}$$

det の符号は運動の向きを決定する。そして幾何学的な意味で$g \in G$ は次の4つのいずれかの型に分類される。

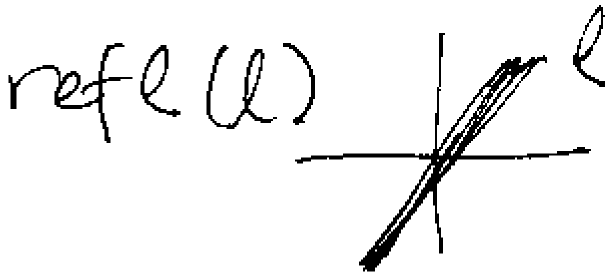
det $g = +1$ の場合 （向きを変えない） $t_b \circ rot(\theta)$ $\Rightarrow$

ｉ） 固定点を持たない t_b （ただし例外あり、$b=0$ はすべての点が固定点となる）

ⅱ） 固定点p を一つだけもち、その周りの回転

det $g = -1$ の場合 （向きが逆になる） $t_b \circ rot(\theta) \circ refl(l)$ $\Rightarrow$

ⅲ） ある直線l に関する鏡映



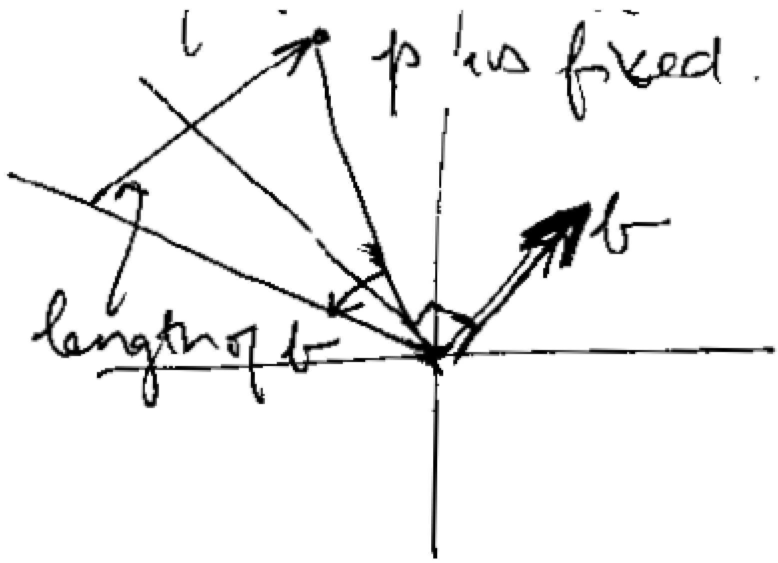
ⅳ） 直線lを固定するすべり鏡映　glide reflection　$refl(l)+b$

<u>4つの場合への分類(内訳)</u>

（ⅰ）は$\theta=0$　の場合である

（ⅱ）は$\theta\neq 0$の場合である。このとき、もし、$b=0$　とすると$p=0$　で$G_0=O(2)$　の中で

$\det=+1$　とすると$SO(2)$　になる。また、$b\neq 0$とするとき固定点p　は以下のように見つけら



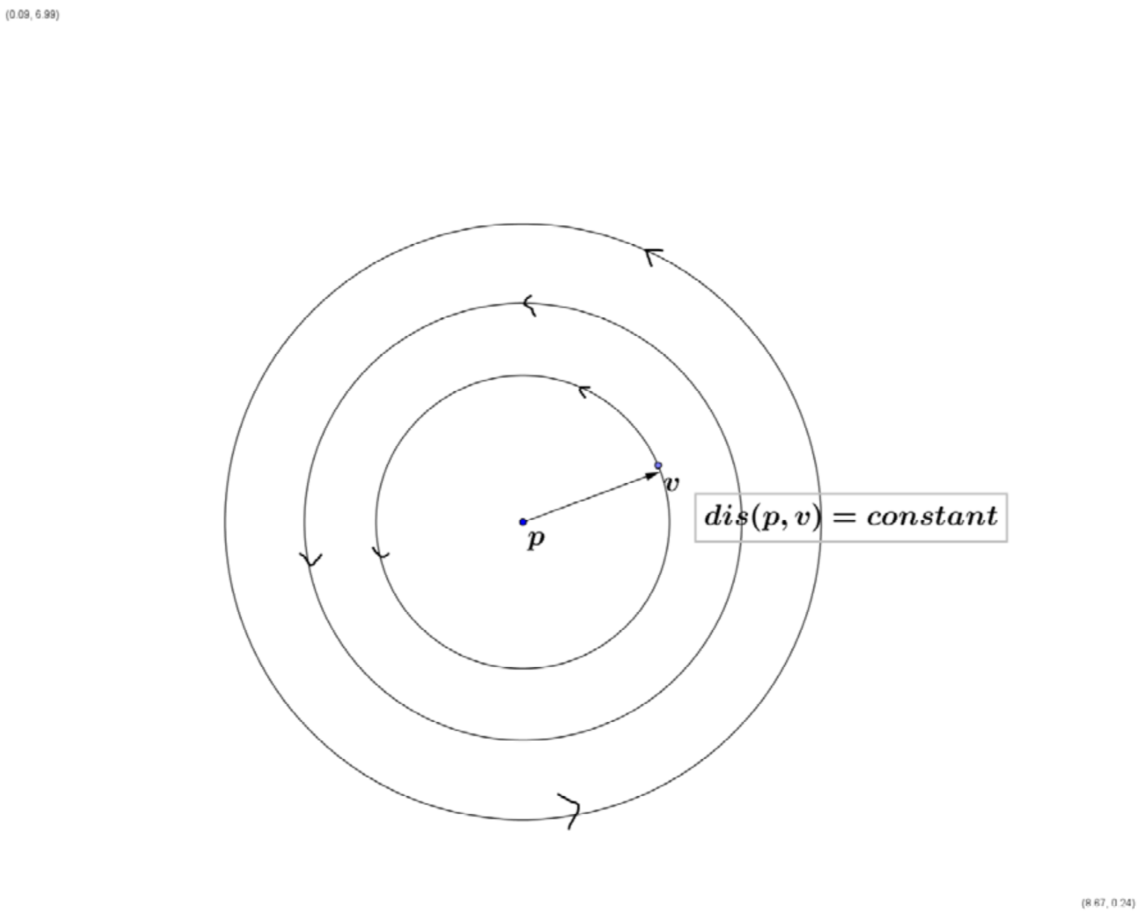
れる。

まず、ベクトルb　に原点で直交している直線l　を引く。　上の図で固定点　pは、点pのl

に関する鏡映の結果をq　とするとベクトル$\overrightarrow{qp}$の長さがベクトルbの長さに等しくなっているよう

に探すことができる。そして我々の運動はp　を中心として、半径$d(p,v)$　の円周上をの回転

である。



また、幾何学的にわかることだが、固定点として p は唯一のものである。

（ⅲ）（ⅳ）についても同様に幾何学的な考察ができる。

さて、$G = \mathbb{R}^2 \cdot O(2)$ における有限部分群 Γ について調べよう。

Γ は t_b ，$b \neq 0$ は含まない。なぜなら、t_b は $\mathbb{R}^2$ のベクトルに対応してあり、無限群を構成する。 次の定理は有限群を特徴づける際に決定的な役割を果たす。

<u>定理</u> 有限群 Γ は固定点 $p \in \mathbb{R}^2$ をもつ。（すなわち、ある $p \in \mathbb{R}^2$ が存在して、すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma(p) = p$ を満たす）

証明）固定点 p に対する抽象レシピ（料理法）は以下のようなものである。$s \in \mathbb{R}^2$ を任意にとる。 ベクトルの集合 $\{\gamma(s):\gamma \in \Gamma\}$ は有限集合である。いま、$n = \#\Gamma$ （Γ に属する異なる元の個数）とおいて、$p = \frac{1}{n}\sum_{\gamma \in \Gamma}\gamma(s)$ とおくと、この p は固定点となる。実際 $g \in \Gamma$ を任意にえらび、$g(p)$ を施すと、$g(p) = \frac{1}{n}\sum_{\gamma \in \Gamma} g \circ \gamma(s)$。$\gamma \to g \circ \gamma$ は Γ から自分自身 Γ への全単射であるから $\frac{1}{n}\sum_{\gamma \in \Gamma} g \circ \gamma(s) = \frac{1}{n}\sum_{\gamma \in \Gamma}\gamma(s)$ すなわち $gp = p$ である。■

いま、$G_p = \{g \in G : g(p) = p\}$ とすると、$\Gamma \subset G_p \subset G$ となるが、他方 $G_p = t_p G_0 t_{-p}$ と書くことができる。したがって、$\Gamma^* = t_p^{-1}\Gamma t_p$ とおくと、$\Gamma^* = t_p^{-1}\Gamma t_p \subset G_0 = O(2)$ がわかる。

$\#\Gamma^* = \#\Gamma$ が有限であり、$\Gamma^* \cong \Gamma$ （Γ と Γ' は isomorphic）である。Γ^* は Γ の共役であることにも注意しておこう。

つぎに、$\Gamma \subset O(2)$ である有限群 Γ の分類を試みよう。2つの可能性がある。

① $\Gamma \subset SO(2)$ （$\det = +1$ ）。この場合、$\forall \gamma \in \Gamma$ は $\gamma = rot(\theta)$ と書ける。Γ が有限群であることから、$\#\Gamma = n$ とすると、$\theta = \frac{2\pi}{n}$ であり、 $\gamma_1 = rot\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ を生成元とする巡回群となる。位数 n の巡回群は C_n と書かれる。 n を変えたいろいろな Γ を考えれば、これはすべての巡回群を与えてくれる。

② $\Gamma \cap SO(2) = \Gamma_+$ は Γ において指数2をもつ。指数が2の部分群は正規部分群である。

（補注2参照） 剰余類 Γ / Γ_+ の元は2個であり、Γ_+ は正規部分群。つまり剰余類 Γ / Γ_+ は剰余群である。（$\det = \pm 1$ ）。
Γ_+ は①の場合で巡回群、$\Gamma - \Gamma_+$ は鏡映である。したがって、

$\Gamma = \langle$ rotation by $\frac{2\pi}{n}$ & reflection $\rangle$
← dihedral group ...

この有限群は2面体群 dihedral group と呼ばれ、位数は 2n となるので、D_{2n} と書かれる。

まとめると
①　は位数n の巡回群　C_n
②は位数$2n$ の2面体群　D_{2n} そして、$n \geq 3$ では可換でない(nonabelian)

これは序章に過ぎない。さらに深い理論が次回以降展開される。

補注1)

群Gの部分群H をとるとき、ある$a \in G$ について$aH = \{ah : h \in H\}$ を GのHに関する

左剰余類という。群演算の性質(逆元の存在)から、H とaH の間には全単射の関係があり、
その濃度(要素の個数)は等しい。G のH に関する左剰余類の集合をG/H と書く。

G/H の濃度(要素の個数)をH の指数 index と呼び、$[G:H]$ と書く。このときつぎが成

立する。

ラグランジュの定理: $\lvert G \rvert = \lvert H \rvert \lvert [G:H] \rvert$ 　ただし、$\lvert K \rvert$ は集合K の濃度をあらわす。

Gが有限群の場合だけ証明する。剰余類の異なる要素を$a_1H, \cdots, a_mH$とする。つまり、
$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_mH$ という分割になっている。このうちひとつは Hである。

そして、H とaH の間には全単射の関係があることから、$\lvert H \rvert = \lvert a_1H \rvert = \cdots = \lvert a_mH \rvert$ であり、

$[G:H]$は剰余類の要素数で、今の場合m である。したがって、$n = m\lvert H \rvert$ であるが、これ

はとりもなおさず$\lvert G \rvert = \lvert H \rvert \lvert [G:H] \rvert$を意味している。

補注2)
任意の$x \in G$ に対して$xK = Kx$ となるG の部分群を正規部分群という。このとき、$K \lhd G$
という記号が用いられる。
Gの部分群Hについて剰余類G/H が定義できるが、さらに、Hが Gの正規部分群である時、$aH \bullet bH = abH$ という演算について剰余類G/Hは群となる。このとき剰余類G/HはGの剰余群と呼ばれる。剰余類G/Hが常に剰余群になるとは限らない。しかし、G がアーベル群のときはあきらかに、$xH = Hx$となるので、剰余類G/Hは剰余群になる。また、Hの指数が2のときも特別で、部分群Hは正規部分群となる。

H が指数2のG 部分群であるとき、$H \lhd G$ である。

証明）$G=H\cup(G\setminus H)$ と言う分割において、$x\notin H$ について $xH=G\setminus H$ であり、

$Hx=G\setminus H$ であることから、$xH=Hx$ が成り立つからである。■

補注3）

群 G,G' に対して写像 $f:G\to G'$ が $f(a\bullet b)=f(a)\circ f(b)$ を満たすとき、群の準同型写像と言う。ここで、群演算“$\bullet$” は G の“$\circ$” は G' の群演算（積ともいう）。ただし、これらの積演算 $\bullet,\circ$ は文脈から類推できるので省略されることが多い。

命題　群の準同型写像　$f:G\to G'$ があるとき
（1）$K=\ker G$ は G の部分群である。
（2）$xK=\{y\in G: f(x)=f(y)\}=Kx$ が言えるので、$K=\ker G$ は正規部分群である。

$x,y\in K$ とするとき、$f(x)=e'$ 、$f(y)=e'$ である。ここで、e' は G' の単位元。

$f(xy)=f(x)f(y)=e'\cdot e'=e'$ であるから $xy\in K$ 。$f(x^{-1})=(f(x))^{-1}$ より、$x\in K$ のとき、すなわち $f(x)=e'$ のとき $f(x^{-1})=(e')^{-1}=e'$ より。$x^{-1}\in K$ 。これは K が部分群であることを示している。// $y\in xK$ と $f(a)=e'$ となる a により、$y=xa$ と書けるから、

$f(x)=f(ya)=f(y)f(a)=f(y)e'=f(y)$ 。逆に $f(x)=f(y)$ とすると、

$f(x^{-1}y)=f(x^{-1})f(y)=(f(x))^{-1}f(y)=e'$ より、$x^{-1}y\in K$ すなわち、$y\in xK$ となる。

右剰余類 Kx についても同じ議論で命題が正しいことがわかる。■