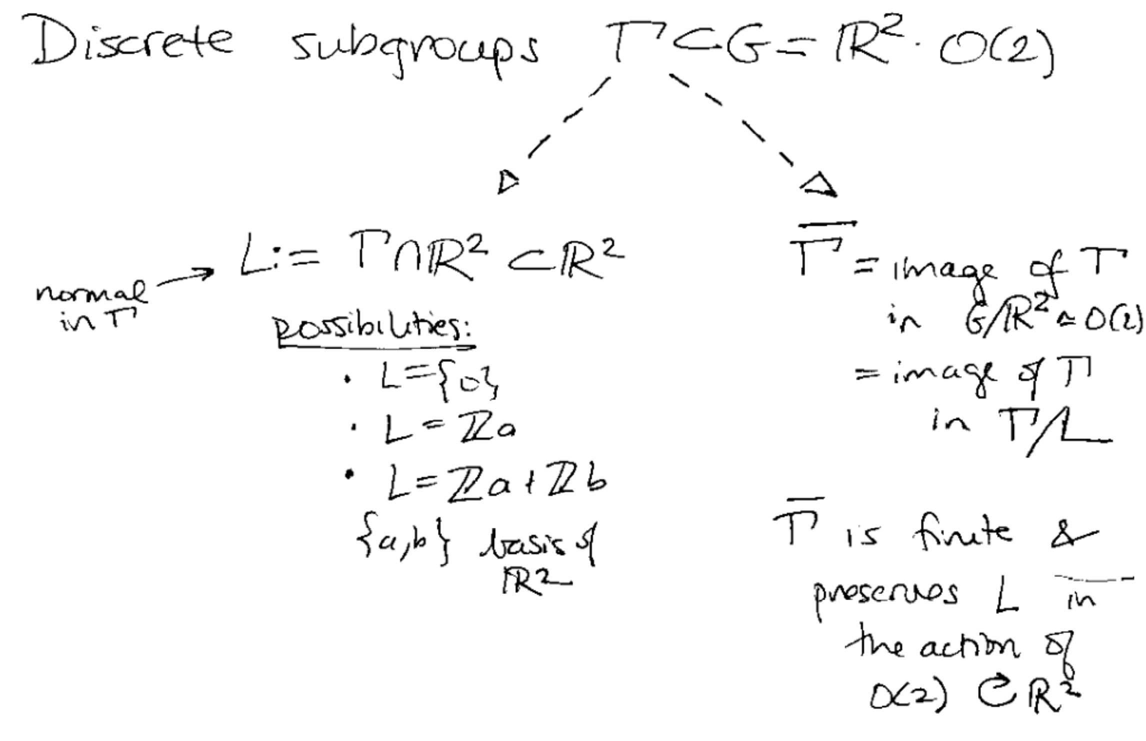
Lecture　17



$G=\mathbb{R}^2\cdot O(2)$ の離散部分群 Γ を考える

$L=\Gamma\cap\mathbb{R}^2$ とおくと、L は Γ の正規部分群である。

剰余群　$G/\mathbb{R}^2\cong O(2)$ において、$\varphi(g)=\bar{g}\in G/\mathbb{R}^2$ ，$g\in G$ となる自然な写像

$\varphi:G\to G/\mathbb{R}^2$ があり $\bar{\Gamma}=\varphi(\Gamma)$ とおく。他方 Γ/L において、$g\in\Gamma$ をとり

$\psi(g)=\bar{g}\in\Gamma/\Gamma\cap\mathbb{R}^2$ とすると、ψ は φ の定義域を Γ 上に制限したものになっている。そこで、ψ は φ と同じ記号で書いても混乱は起きないだろう。つまり、$\bar{\Gamma}=\varphi(\Gamma)$ は φ は Γ から Γ/L への全単射である。そして、$\bar{\Gamma}$ は有限部分群となり、L に作用 $\gamma\in\bar{\Gamma}$ （$\subset O(2)$、すなわち回転）を施しても L を保存するものとなる。すなわち、$\gamma:L\to L$。

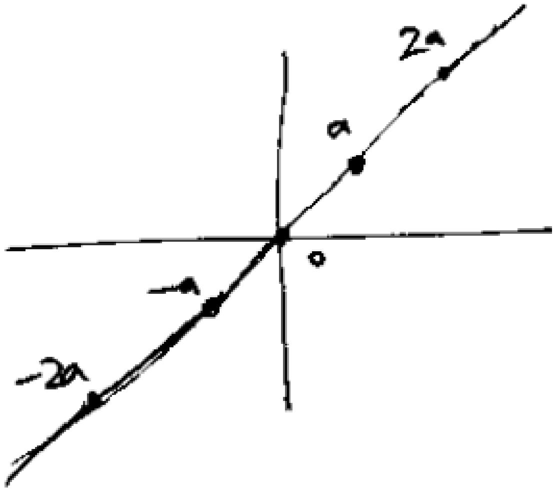
L の可能性としては３つある。

①$L=\{0\}$ 、②$L=\mathbb{Z}a$ 、③$L=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}b$ ただし、$\{a,b\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底。

そして、前回つぎのことを確認した。

①$L=\{0\}$ のときは、$\Gamma=\overline{\Gamma}=C_n$ またはD_{2n} ，$n\geq 1$（　これらすべて実現可能）

②$L=\mathbb{Z}a$ のときは、$\overline{\Gamma}=C_1,C_2$ ，D_2,D_4 （D_4 は Klein の４群）しかない。



$\gamma\in\overline{\Gamma}$ のとき、$\gamma(a)=\pm a$ は$\mathbb{Z}a$ の要素として等距離にある。いいかえれば

$\gamma\in SO(2)$ のとき$\gamma=I\ or\ -I$ である。つまり、$\overline{\Gamma}=C_1,C_2$。　あと鏡映は上の図

の直線に直交する直線を対称軸とするものであり、それからD_2,D_4がでる。

③$L=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}b$のときは、$\overline{\Gamma}=C_n\ or\ D_{2n}$ 、$n=1,2,3,4,6$である。

証明）　$\gamma\in SO(2)$のとき、$f(X)$ をγ の固有多項式とすると、

$f(X)=X^2-2\cos\theta X+1$ であるので、これが共役複素根をもつためには

$|2\cos\theta|\leq 4$ 。しかし、$2\cos\theta$ はγ の行列$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ は基底をa,b と

しているので整数からなる2×2 行列である。つまり、$2\cos\theta=0,\pm 1,\pm 2$ の５つの場合しかない。この場合γ の位数が$n=1,2,3,4,6$、いいかえれば

$A^n=I$ となるのは　$n=1,2,3,4,6$ の場合であることを言えばよい。

１）$\cos\theta=0$ のとき、$\sin\theta=\pm1$ であるから $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ または $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ であり、いずれも $A^4=I$ 。したがって γ の位数は４

２） $\cos\theta=1$ のとき、$\sin\theta=0$ であるから $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。 $A^1=I$

したがって γ の位数は１.

３） $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき $\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから $A=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ または

$A=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$。これらは $A^6=I$ が確かめられる。したがって γ の位数は 6.

4) $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき $\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、 $A=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ または

$A=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$。これらは $A^3=I$ が確かめられ γ の位数は３である。

補注） ３） ４）について、直接計算してもたいしたことはないが、

$S=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ とおくと３）の A は $S,{}^tS$ であり、４）の A は $-S,-{}^tS$ である。

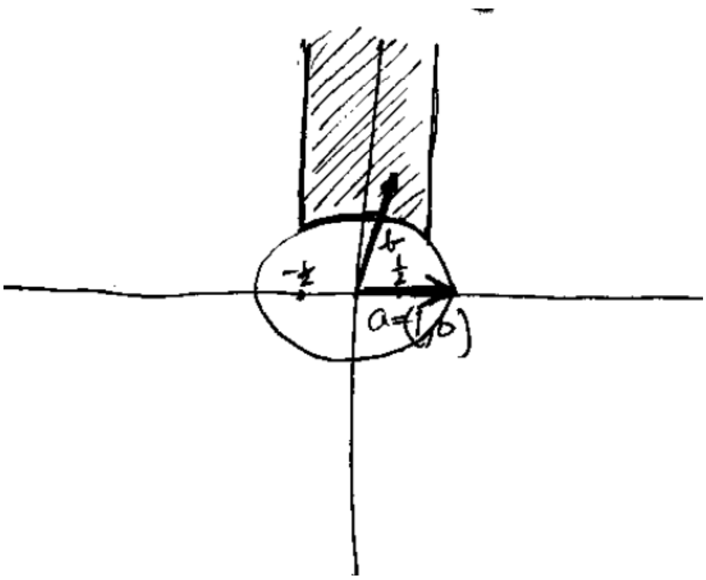
したがって $S^6=\left({}^tS\right)^6=I$ 、$(-S)^3=\left(-{}^tS\right)^3=I$ を言えばよい。まず $S\in O(2)$ （直交行列）であるから ${}^tSS=I$ である。また直接計算で $S^2=-{}^tS$ がわかる。この最後の式の両辺に S をかけると $S^3=-{}^tSS=-I$。つまり $S^6=\left({}^tS\right)^6=I$ がわかる。

また、$(-S)^3=-S^3=I$ がわかり、同様に、$(-S)^3=\left(-{}^tS\right)^3=I$ も簡単である。

$\mathbb{R}^2$ における格子 $L=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}b$ の分類を考えてみよう

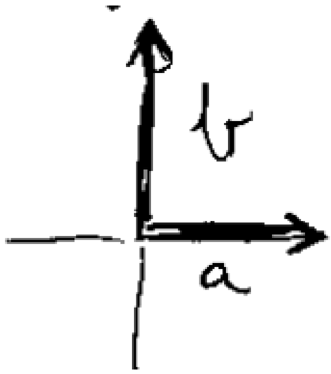
$\gamma\in O(2)$ で L を γL に変換することは $\bar{\Gamma}=Aut(L)$ の γ による共役をとることと同じである。また、L を cL （$c\in\mathbb{R}^\times$ ）と変換しても $\bar{\Gamma}=Aut(L)$ は変わらない。L は $O(2)$ の操作を施しても $\mathbb{R}^2$ の上での $\mathbb{R}^\times$ をかける操作をほどこしても変わらない性質を見よう。そこで、$\mathbb{R}_+^\times$ をかける操作をして a の長さを１と仮定する。また、$SO(2)$ の操作、回転を施すことにより、結局 $a=(1,0)$ とおくことにしよう。それでは、第２の基底 b はどうなるだろう。a は最小のベクトルとしており、その長さを１としたのであるからそれより小さくなれないので $|b|\geq 1$ である。b を $x-y$ 平面に描いたとき、b の y 軸成分はゼロではない（$\{a,b\}$ が基底と言う条件と $a=(1,0)$ であるから）。そこで必要なら b を $-b$ に置き換えて、 b の y 軸成分は正であるとしてよい。さらに $L=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}b$ において b を $b+na$ に置き換えて、b の x 軸成分は $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$ とできる。

すなわち、$L\simeq L_b=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}b$ と考えても本質は失われない。つまり b の存在領域は以下の図で影をつけた部分で表せる。

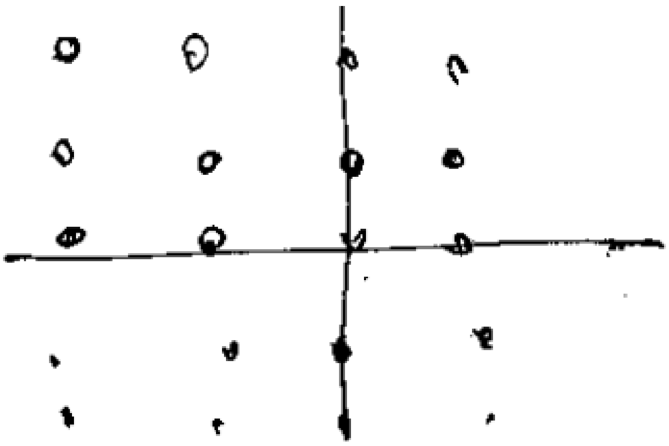


bが領域の本当に内部にあるときは、$\bar{\Gamma}$ の可能性としては、1 か 位数２の巡回群$C_2=\langle -I\rangle$である。

もし、$b\neq 1$ で$b\perp a$ のとき
$\bar{\Gamma}$ の可能性としては、
$1,C_2,D_2,D_4$ のいずれかである。

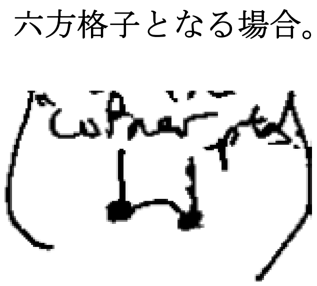


また、$a=(1,0),b=(0,1)$ のときは、四角格子になり、



$\bar{\Gamma}$ の可能性としては、$1,C_2,C_4,D_4,D_8$ である。

六方格子となる場合。左下の図の黒丸　つまり、$a=(1,0)$,



$b=one\,of\;\;two\;\;corners=\left(\pm\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

のときで、このとき

$\bar{\Gamma}$ の可能性としては、$1,C_2,C_3,C_6,D_6,D_{12}$ のいずれかである。

Honey comb がでてくる。

ここまで、$\mathbb{R}^2 = S$ 上の運動の群 $G = \mathbb{R}^2 \cdot O(2)$ を考えてきた。これらの考え方をもっと一般な群 G と集合 S に対して抽象化してみよう。

群の作用　$G \times S \to S$　$(g,s) \to g \cdot s$ について次のことが要請される

1）$e \cdot s = s$　$\forall s \in S$　2）$(gh) \cdot s = g \cdot (h \cdot s)$　$\forall g,h \in G$，$\forall s \in S$

例）平面上にあるすべての直線の集合 $l \in \mathbb{R}^2$ への群 G 作用（$G = \mathbb{R}^2 \cdot O(2)$ ）

例）平面上にあるすべての三角形の集合への G 作用（$G = \mathbb{R}^2 \cdot O(2)$ ）

上の例において

平面上にあるすべての直線の集合 $l \in \mathbb{R}^2$ に対して $O_l = S$

三角形の集合 Δ に対して　$O_\Delta \neq S$

もし、ある $s \in S$ （すべてのと言っても同じ）に対して $O_s = S$ のとき G は S の上を推移的に作用すると言う。この言葉を使うと
直線の場合は推移的、3 角形の場合は非推移的である。

ここで 2 つ概念 orbit , stabikizer を導入する。
$s \in S$ に対して

軌道(orbit)：$O_s = \{g \cdot s : g \in G\} \subset S$

固定化群（stabilizer）：$G_s = \{g \in G : g \cdot s = s\} \subset G$

<u>推移的 G 作用のモデル</u>
G 任意の群
H 任意の部分群（$H \subset G$ ）

$S = G/H = \{aH \subset G\}$

G の S 上での作用を　$g \cdot (aH) = gaH$ によって定義する。作用“$\cdot$” は

$a \cdot H = aH$ に他ならないから推移的であり、その軌道は全体になる：$O_H = S$

Question：固定化群　G_H は何か？

Answer：$G_H = H$

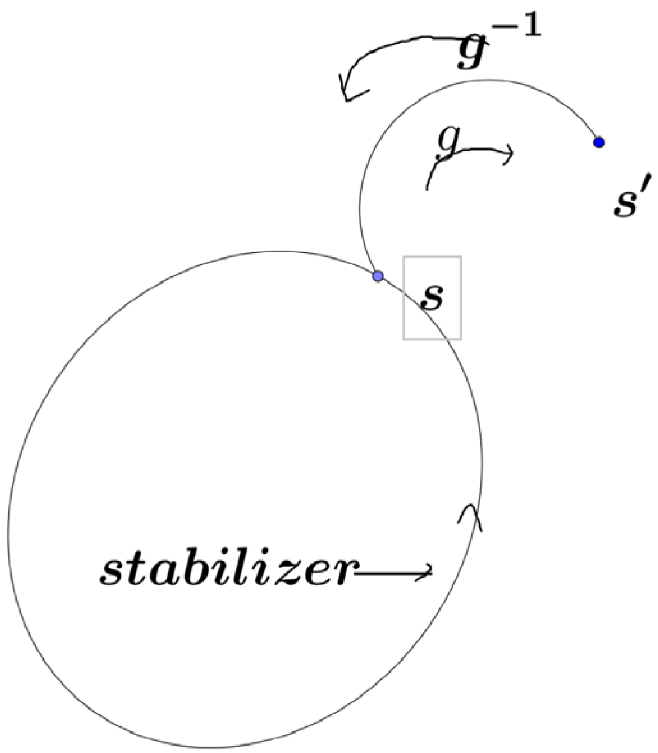
何故なら　$G_H = \{g : gH = H\} = H$

Question：固定化群　G_{aH} は何か？

Answer：$G_{aH} = aHa^{-1}$

何故なら、$G_{aH} = \{g : gaH = aH\} = \{g : a^{-1}gaH = H\} = a\{g' : g'H = H\}a^{-1} = aHa^{-1}$

もっとより“一般に”、S の上でG が推移的に作用するならば：
任意に固定した$s \in S$ と任意の$s' \in S$ に対して、ある$g \in G$ があり、$g \cdot s = s'$ であり、$G_{s'} = gG_s g^{-1} \subset G$ となる。言い換えれば、すべての固定化群は互いに共役である。



事実、一般的な推移的作用は剰余類への作用 coset action と同様に一般なものである。

> <u>命題</u>　もし、S の上でG が推移的に作用して、$s \in S$ であるなら、下図で示されるような同型写像　bijection φ がある。

$$\varphi : G/G_s \xrightarrow{\sim} S$$

$$g \longmapsto g \cdot s$$

(G_s = stab. of s)

(G/G_s = coset space viewed as G-set)

s.t. $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$

"map of G-sets"
= "map of sets w/ G-action"

おまけ、$\mathbb{R}^n \cdot O(n)$の作用は$L = \mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 + \cdots + \mathbb{Z}a_n \subset \mathbb{R}^n$　上ではでどのようになるか？　$n \leq 8$ の場合あるいは$n = 8$ とか$n = 24$ について調べられた結果があるが、まだ全貌は未解決である。