LECTURE　18

G が集合 S の上で作用しているとする：
$G \times S \to S$

$(g,s) \to g \cdot s$

$s \in S$ に対して、軌道 $O_s \subset S$ と固定化群 $G_s \subset G$ が定義される。そのとき、

- $$\begin{aligned} G/G_s &\xrightarrow{\sim} O_s \quad \text{as a } G\text{-set} \\ gG_s &\longmapsto g \cdot s \end{aligned}$$
- $$s' = g \cdot s \quad G_{s'} = gG_sg^{-1} \quad \text{conjugate subgroup}$$

G/G_s と O_s には同型の対応が付けられる。

$s' = g \cdot s$ なる関係にある s, s' と対応する固定化群 G_s と $G_{s'}$ は互いに共役、

$G_{s'} = gG_sg^{-1}$ である。G が集合 S の上で作用しているとき、$|G|$ も $|S|$ も有限とし、軌道を $O_{s_1}, O_{s_2}, \cdots, O_{s_n}$ とする。このとき、次の計算式が成り立つ。

$$\begin{aligned} |S| &= |O_{s_1}| + |O_{s_2}| + \cdots + |O_{s_n}| \\ &= |G/G_{s_1}| + |G/G_{s_2}| + \cdots + |G/G_{s_n}| \\ &= |G| \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|G_{s_i}|} \end{aligned}$$

例

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\text{finite}}{\supset} & H & \supset & \\ G & & & & H\cap K \\ & \supset & K & \supset & \end{array}$$

上の図のような状況を考える。すなわち、H とK はG のそれぞれ指数$[G:H]$と$[G:K]$の部分群でこれら指数を有限とする。このとき、$H\cap K$ はH およびKの部分群となっている。このとき次が成り立つ。

命題：$[G:K] \geq [H:H\cap K]$

証明）　$S=G/K$ とおく。このとき、$|S|=[G:K]$である。また、G はS の上を可移的に作用する。このG のS の作用を部分群HのS への作用に制限してやるとこれは結果的にH の軌道の和になる。作用をHへの制限の下で、剰余類$s=eK$ の軌道を考えると次の等式が成り立つ

$$\underset{\text{under } H}{\underset{\uparrow}{O_s}} \simeq H/H_s = \{h\in H : hK=K\} = H\cap K$$

$\boxtimes$

例　G が$S=G$ の上を$g\cdot s=gs$ ととる作用を考えると

$O_e=G$ となる。

例　上の例よりもっと興味深い共役をとる作用、すなわち$S=G$上のGの作用は$g\cdot s = gsg^{-1}$ である。この作用が$(gh)\cdot s = g\cdot(h\cdot s)$ を満たすことは容易にわかる。しかし、$O_e=\{e\}$ であり$G_e=G$ であるから、G が自明でない限りこの作用は可移的ではない。O_s はs の軌道であり、軌道はs の共役クラスであるので、

$$|G| = \sum_{\text{conj classes}} |O_s| = \sum_{\substack{\text{conj} \\ \text{Classes} \\ \text{of } G}} \frac{|G|}{|Z_s|}$$

ここで、Z_s はs の中心化群である。ここで、中心化群というのは

$Z_s=\{g\in G : gs=sg\}=G_s$ のことである。しかし、Gがアーベル群のときは、

$|O_s|=1$ であり、$G_s=G$ となってしまうので、この等式は興味のないものになってしまう。

例　$G=S_3$ とすると、共役類のクラスは$\{e\}$ ，{位数２の要素が３個}

$=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ 、{位数３の要素２個} $=\{(1,2,3),(1,3,2)\}$ であり、これらの類方程式は“$6=1+3+2$” となる。そして、$Z_e=G$ 、$Z_\tau=\{e,\tau\}$ 、$Z_\sigma=\{e,\sigma,\sigma^2\}$

であり$O_e=\{e\}$ 、$O_\tau=$ {　位数２の要素が３個}、$O_\sigma=$ {位数３の要素２個}

ここで、τ の位数は２、σ の位数は３である。

一般に

$|S_n|=n!$ で、共役類の個数＝$p(n)$　partition 関数で$n!$ よりずっと少ない

モンスター群

$|G|\sim 10^{47}$　　共役クラス＜２００　（高度に非アーベル的な群）

が知られている。

質問：共役をとる作用を考えるとき、$|O_s|=1$ となるのはどういう時か？

答え：$|O_s| = \dfrac{|G|}{|G_s|}$ であるから、この質問はいいかえれば、$G = G_s = \{g : gs = sg\}$ となるのはいつかと言う問になる。したがって、これは$Z(G)$ （G の中心）にぞくする、すなわち $s \in Z(G)$ のときである。

定理 p を素数とする。$|G| = p^n$ とすると、$Z \neq \{e\}$ 。

証明：

$$|G| = \sum_{\text{conj classes}} |O_s| = \sum_{\substack{\text{conj} \\ \text{Classes} \\ \text{of } G}} \frac{|G|}{|Z_s|}$$

より、$\dfrac{|G|}{|Z_s|} = p^k$ をみたす。ただし、$0 \le k \le n$ を満たすあるk である。したがってこれらすべては$k = 0$ ($|O_s| = 1$) の場合を除いてp の倍数である。これらのことから$\#Z$ はp の倍数。1 は決してp の倍数であることはできない。つまり、$Z \neq \{e\}$ が結論される。■

G を素数のべきの位数をもつときは中心は$Z \neq \{e\}$ をみたす。このことを帰納的に適用していくと

$G_1 = G/Z$ は$|G|$ より小さいp のべきの位数をもつ、その中心$Z_1 \neq \{e\}$

$G_2 = G_1 / Z_1$ の位数は$|G_1|$ より小さいp のべきの位数をもつ。中心は$Z_2 \neq \{e\} \ldots$
以下同様の議論を続けると最後には自明な群しか残らない状態で終わる。

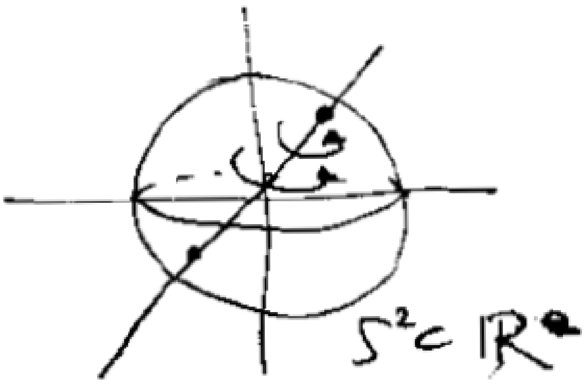
このようにして、$|G| = p^n$ なる G は $n=1$ でない限り単純とはならない。そして、$|G| = p$ の場合だけ単純となる。（自明な部分群しか持たない群は単純と呼ばれる）。もっと一般には次の定理がある。

バーンサイドの定理： p,q 素数 $|G| = p^n q^m$ のとき G は単純ではない

しかし、単純群 A_5 は位数 $60 = 2^2 3 \cdot 5$ は素数が３つの場合がある。

$SO(3)$ の有限部分群 G はすべて軸回りの回転である。（オイラーの定理）

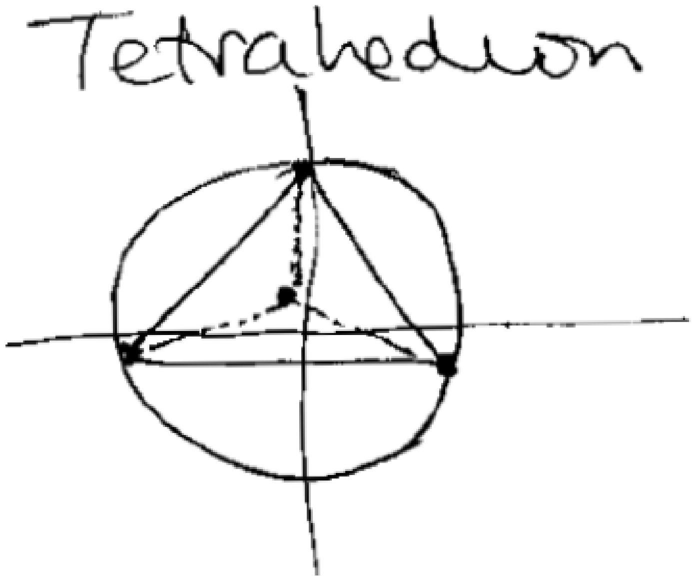
$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathrm{rot}(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$



例　四面体

3riangle

4 個の頂点
6 個の辺
4 個の面
それぞれ正三角形からなっている面



自分自身への作用G は四面体 tetorahedoron を保存する頂点の置換群S_4 の部分群である。S は頂点の推移的な集合で$\#S = 4 = \frac{|G|}{|G_{vertex}|} = \frac{|G|}{3}$ つまり、$|G| = 12$ であり、このことから$G \cong A_4$ であることがわかる。なぜならA_4 はS_4 の位数１２である唯一の部分群であるから。６個の辺

octohedran $|G| = 24$ $G \cong S_4$ 4triangle

例　$H \triangleleft G$ でG が$S = G/H$ に作用するとき、固定群G_s はすべてのs で$G_s = H$ である。（したがって固定群からは要素を取り出せない）

物理的な仮説。宇宙はポアンカレの３－球空間=SO_3/A_5　Poincare’s 3 sphere

SO_3 はS^2 上に一点の固定群≅ SO_3