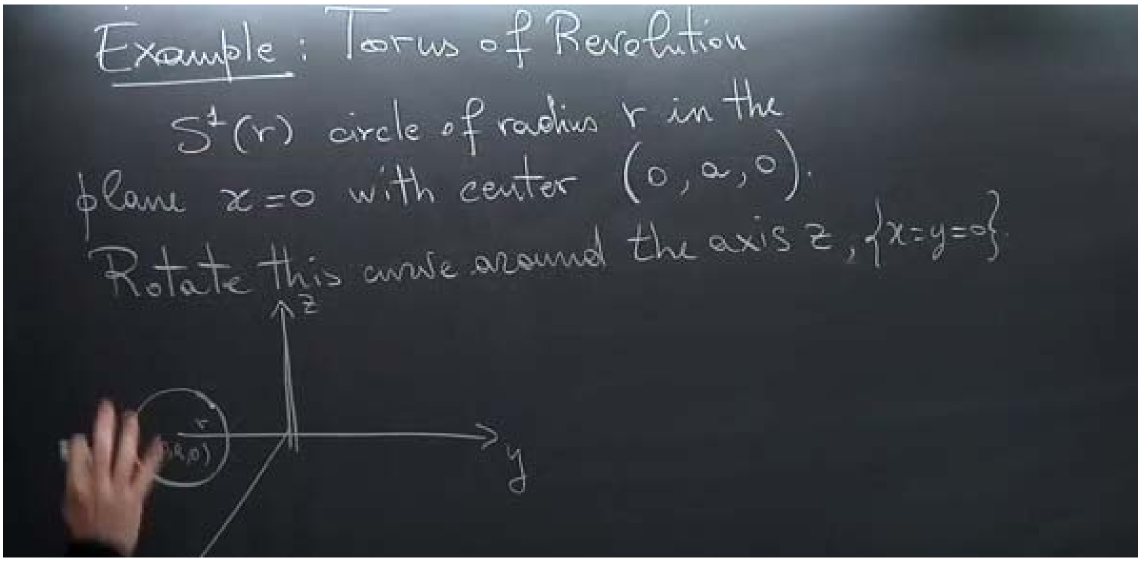
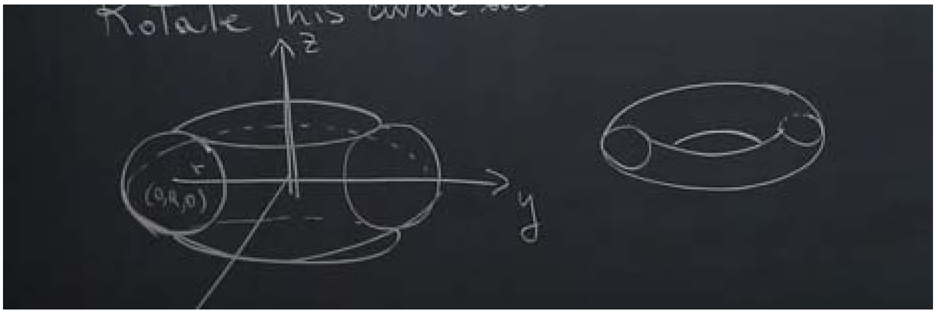
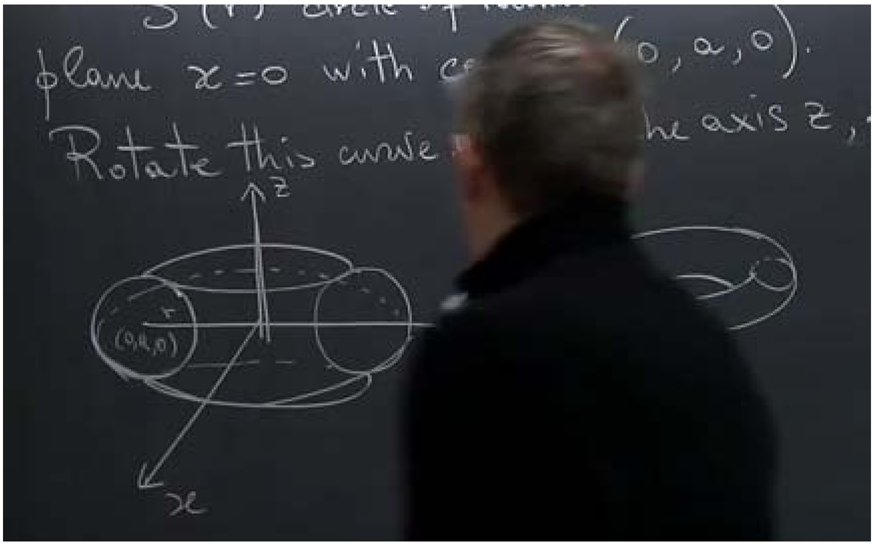
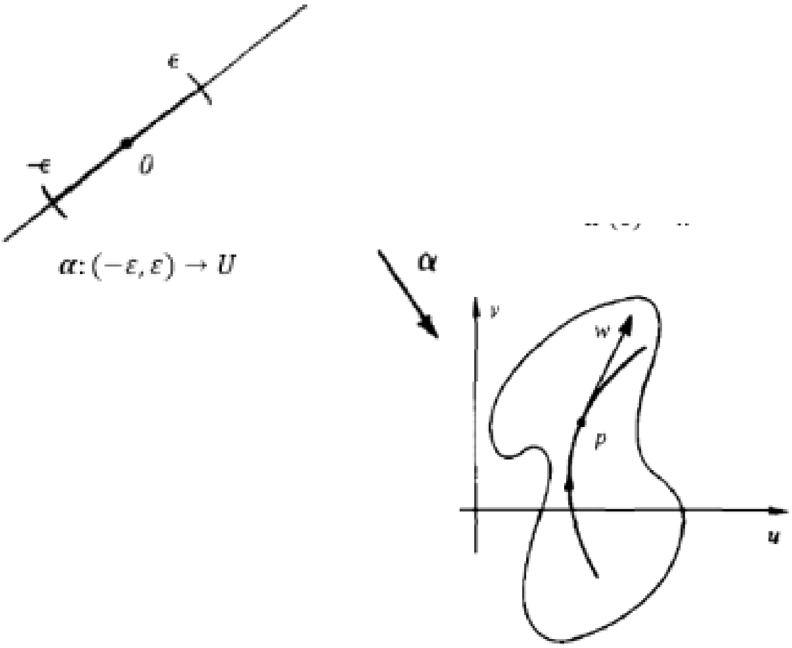
YuTube の歩き方：数学編



曲線と写像

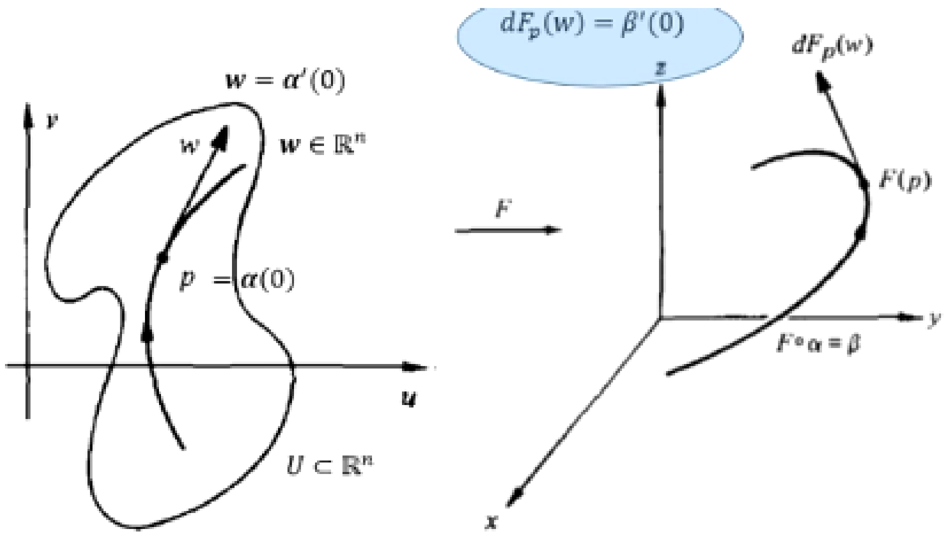



$U \subset \mathbb{R}^2$ は開集合で、$\alpha(t)=\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, -\varepsilon < t < \varepsilon$ は$u-v$平面における曲線を表す。

ここで、$\alpha \in C^\infty$ ，$\alpha(0)=p$ 、$\alpha'(0)=w$ とする。すなわち、$w=\alpha'(0)=\begin{pmatrix} \dfrac{du}{dt}(0) \\ \dfrac{dv}{dt}(0) \end{pmatrix}$

である。$\alpha'(t) \neq 0 \quad -\varepsilon < t < \varepsilon$ のとき、この曲線は regular といわれる。我々は曲線として regular なものだけを考える。

次に写像　$F: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を微分可能として、微分 $dF_p$ を定義する。




$F$　は具体的には、$F(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)$ と形をしている。このとき、

合成写像　$\beta(t)=F\circ\alpha(t)$　を考える。そして、$\beta'(0)$　を計算すると

$$\beta'(0)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

となるが、要素ごとに書き直してみると

$$\beta'(0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\\ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{du}{dt}\\ \frac{dv}{dt}\end{pmatrix}$$

$w=\alpha'(0)=\begin{pmatrix}\frac{du}{dt}(0)\\ \frac{dv}{dt}(0)\end{pmatrix}$ をみれば

This is known as the **Jacobian Matrix** at the point $p$.

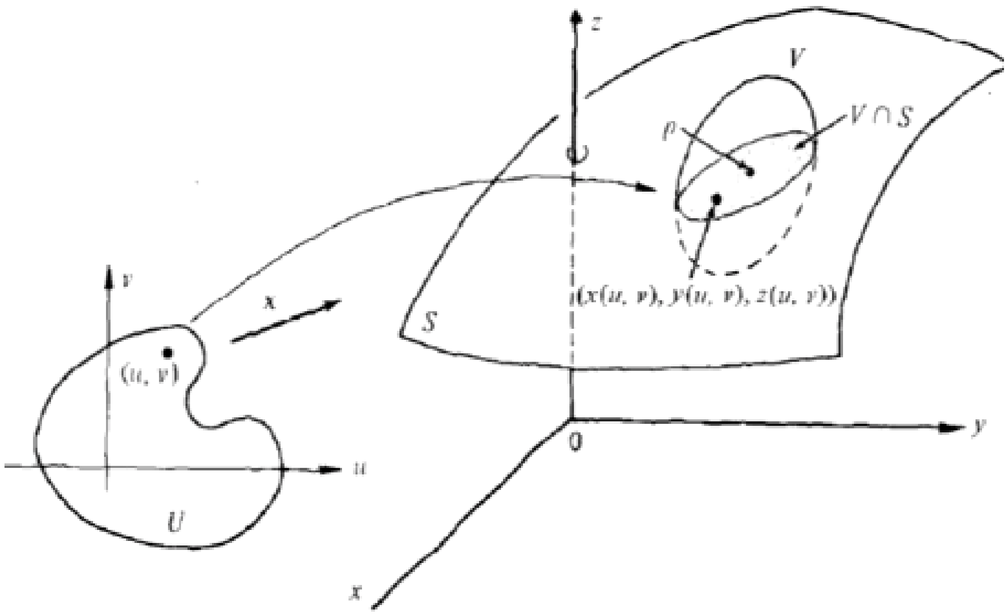
$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{du}{dt}\\ \frac{dv}{dt}\end{pmatrix}=dF_p(\mathbf{w})$$

つまり、$dF_p$ は青で囲まれたヤコビ行列を $w=\alpha'(0)$ に掛けるという線形写像に

なっている。つまり $dF_p=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$ なる微分係数でつくる行列はヤコビアンと呼ばれる。注意するべきことは、$dF_p w$ は $p=\alpha(0)$ , $w=\alpha'(0)$ にのみ依存して、それ以外　$\alpha(t)$ がどのような曲線を描いているかには依存していないことである。

## 曲面

次に regular な曲面 $S$ を定義する。



$S \subset \mathbb{R}^3$ の各点 $p \in S$ の近傍 $V \subset \mathbb{R}^3$ があり、写像 $F: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ が次の３つの条件を満たしているとき、$S$ は **regular な曲面**と呼ばれる。

１） $F$ は微分可能、すなわち、

$F(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$ の各要素 $x, y, z$ が $U$ において $u, v$ について何回でも連続偏微分可能。

２） $F$ は homeomorphism。すなわち、連続な逆 $F^{-1}$ を持つ（開写像といっても同じ）。

３）各点 $p \in U$ について　$dF_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ が１対１.

この時、$F$ は $S$ のパラメータ表示といわれる。

記号のイメージから $\mathbf{x} = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$ と書いて $\mathbf{x}$ は局所座標ともよばれる。以後、$dF_p$ を $d\mathbf{x}_p$ と書こう。すなわち、

$d\mathbf{x}_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ が１対１

$$d\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

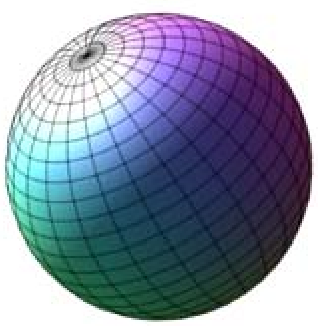
から、

$$d\mathbf{x}_p \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = a \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + b \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$$

が一対一であるためには、ベクトル $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ と $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ が一次独立でなければならない。

例題）球面

Show that $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ is a regular surface.
Let $\mathbb{R}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ and $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

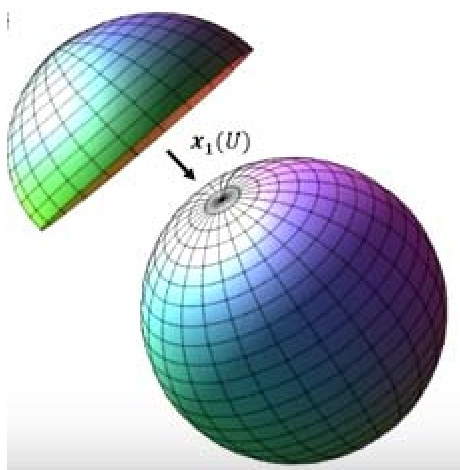


$U=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2<1\right\}$ とする。

$(x,y)\in U$ のとき、$\mathbf{x}_1(x,y)=\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$

とおく。$\mathbf{x}_1(U)$ は $x-y$ 平面の上にある球面上半分である。

右図のようであるが、$\mathbf{x}_1(U)$ は $S^2$ の開被覆 "open covering" とよばれる。




１） $\mathbf{x}_1(x,y)$ は $U$ において微分可能である。

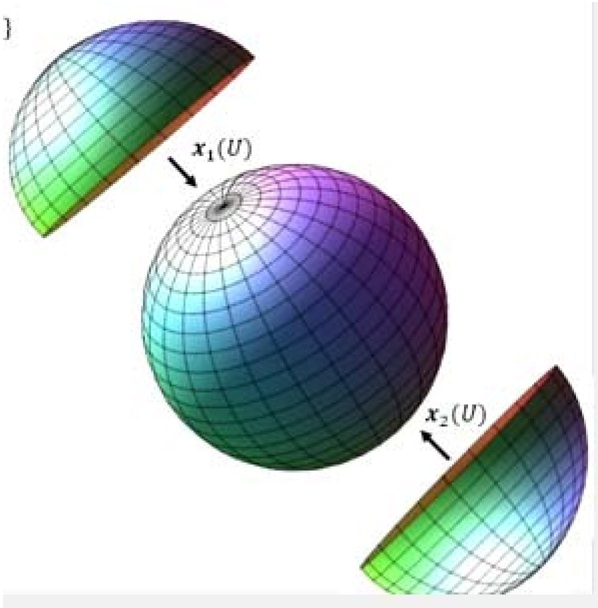
じっさい、

$$\frac{\partial \mathbf{x}_1}{dx}=\begin{pmatrix}1\\0\\-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial \mathbf{x}_1}{dy}=\begin{pmatrix}0\\1\\-\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{pmatrix}$$

でにおいて微分可能で、
３）これら微分は一次独立である。つまり１対１写像となっている。
２）の homeomorphism を示す。実際、
$\mathbf{x}_1^{-1}\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right)=(x,y)$ はより、$\mathbf{x}_1^{-1}$ は連続関数になっている。

次に、$(x,y)\in U$ のとき $\mathbf{x}_2(x,y)=\left(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$ とおく。

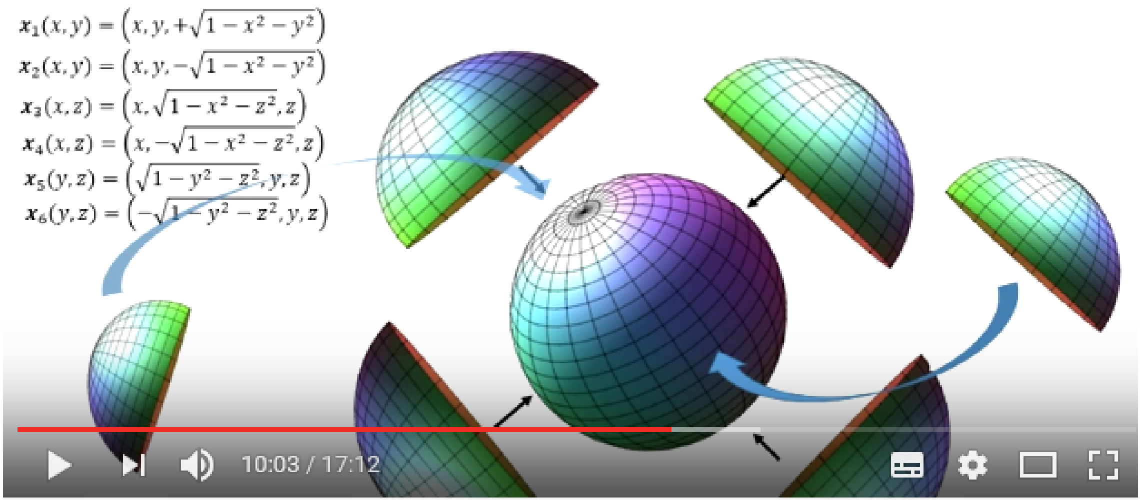
$\mathbf{x}_1(U)$ が北半球を被覆していたのに対して、$\mathbf{x}_2(U)$ は南半球を被覆する。そして、1）2）3）を満足することは同様に示すことができる。




ところが北半球と南半球を被覆できたが、$x^2+y^2=1, z=0$ のところ、すなわち、赤道は被覆できていない。というのは $\sqrt{1-x^2-y^2}$ は微分できない。例えば微分

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1-x^2-y^2}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

は $x^2+y^2=1$ のところは定義できない。したがって、あと４つ $\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$ の開被覆を考える必要がある。

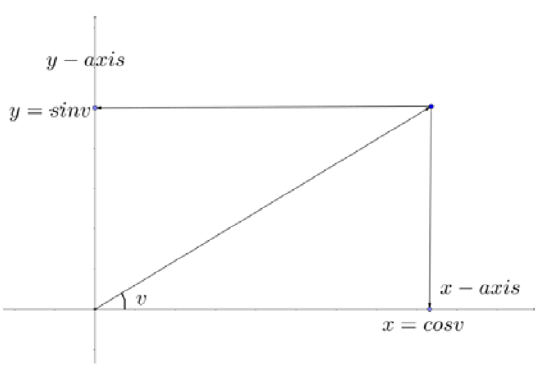


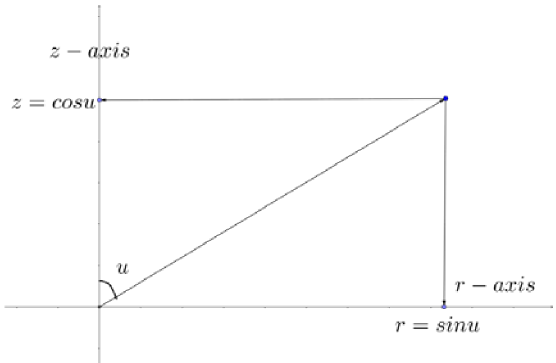

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$ ひとつひとつは、地球の各部分を表示するローカルな地図と考えられる。これらは、チャートといわれる。それに対して $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$ が全部そろうことによって地球すべてを参照することができるようになる。これをアトラスと呼ぶのはわかりやすい。

球面のパラメータ表示は上のものに限らない。ほかによく使われるものは極座標表示である。

例２） $U=\{(u,v):0<u<\pi,0<v<2\pi\}$ とし $\mathbf{x}:U\to\mathbb{R}^3$ を

$\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u)$ とする。これは半径１の地球で、$u$ は北極からの角度である経度、$v$ は子午線からの角度すなわち緯度をあらわす。実際、$(x,y)$ を極座標 $x=r\cos \mathrm{u}, y=r\sin \mathrm{u}$ , $r^2=x^2+y^2$ とする。




上左図が $(x,y)$、右図が $(r,z)$ を表す。したがって、

$$x=r\cos v=\sin u\cos v, y=r\sin v=\sin u\sin v, z=\cos u$$

となる。

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u}=(\cos u\cos v,\cos u\sin v,-\sin u)\ ,\ \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}=(-\sin u\sin v,\sin u\cos v,0)$$

は $(u,v)\in U$ において一次独立である。したがって $d\mathbf{x}_p$ は一対一である。

$\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u)$ は開被覆である。しかし、これは子午線を覆わないので、アトラスを作るには例１と同様にいくつか開被覆を加える必要がある。

例３）グラフは regular な曲面を定義する。
グラフというのは、$U \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし、$f : U \to \mathbb{R}$ を微分可能な関数とする。

$G = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$ は $f$ のグラフと呼ばれる。

$d\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$ において、$\mathbf{x} = (x, y, z) = (u, v, f(u,v))$ と読み替える。

すなわち、$x(u,v) = u, y(u,v) = v, z(u,v) = f(x,y) = f(u,v)$ から

$d\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ となるので、$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ と $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ が一次独立である。また、

$\mathbf{x}^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ は $U$ の上への写像となっているので連続である。

このようにしてグラフは regular な曲面をあらわすことがわかる。

参照リンク
https://youtu.be/RSRIpy8Ajx0
https://youtu.be/gRRysvPytIg

njwildberger
https://youtu.be/6xgtMQ7WSzQ
微分幾何を扱っている。

MIT open course video Lectures(Multivariable Calculus)
https://youtu.be/RMBGQtwkoyU
で球面座標を扱っている