Numerical Rangeの話題

有本彰雄[*]

2005/01/05

numerical range について私がはじめて興味を持ったのは、5 年ほど前参加した、御茶ノ水大学での関数空間セミナーにおける中里氏の講演であった。

最初に、numerical range の定義をしておこう。H を複素ヒルベルト空間（有限次元でもよい）とし、T を H 上の線形作用素とするとき、H_1 を H の単位円（内部も含む）とおいて、numerical range を

$$W(T) = (\langle T\zeta|\zeta\rangle : \zeta \in H_1)$$

と定義する。そして、さらに numerical radius を

$$w(T) = \sup(|\langle T\zeta|\zeta\rangle| : \zeta \in H_1)$$

と定義する。中里氏の講演では、$W(T)$ とそれを含む円周との間でポンスレの定理が成立するという中国人数学者の最近の結果であった。つまり、$W(T)$ の周上の勝手な点から $W(T)$ に接線を引き、円周にぶつかったらそこからまた $W(T)$ に接線を引く。これを繰り返していくと、最初の点に戻るというものである。

これは、そこに出席されていた安藤毅先生もこれは意外な結果と話されていた。安藤先生は、Linear algebra and its aplications という雑誌のエディタで、submit してきたその論文に出会われたという。

numerical range では、1933 の Toeplitz-Hausdorff の結果が有名で、それ以後も多くの性質が発見されてきたが、これ以上に単純で美しい定理はないと思われてきた。つまり、numerical range はガウス平面で凸集合を作る。ぼくは、いつかポンスレの定理と関係したこの論文を読みたいと考え、ポンスレの定理を学ぶため、硲文夫氏の初等代数学、代数学、代数幾何学の 3 冊の本を買い求めた。符号理論と関係していたところと暗号理論と関係する楕円曲線の部分など勉強したが、ポンスレの定理にはたどりつけなかった。そしてふがいないことに、しばらくこの問題から遠ざかっていた。

そこへ、たまたま Proceedings of American Mathematical Society に Karaev が書いた論文 [3]2004 がでた。これは、nil-potent 作用素 T についての $W(T)$ は常に円になるというのである。この証明には、大掛かりな道具が使われていた。Nazy-Foias の Analysis Harmonique des Operateurs de l Èspace de Hilbert という書物にある representation theorem を用いるというもので、ぼくには難解で理解できそうもなかった。部分的には解釈して、円の中心は $W(T)$ の内点になりえないというところについて、Karaev 先生に質問のメールを書いた。Karaev 先生は親切に返事をくれた、そして逆に上記 proceedings の paper の PDF ファイルを持ってたら送ってくれないかというので送ってあげた。Proceedings AMS では electronic 版を速報として出していた。ぼくが手に入れて読んでいたのはこれで、Karaev 先生は自分の書いた論文を日本の僕のところから送ってくれというのも変だが彼のトルコにおける位置がそうさせているのかもしれない。彼の大学からは、proceeding AMS は無料では取れないらしい。そのとき、もっと簡単な証明を考えられないかという風に聞いてみたのだが、わ

*(Department of Mathematics Musashi Institute of Technology, Tokyo Japan)

かったら教えてくれという返事だった。ぼくは再びこの問題に取り組むようになった。

その後、やはりインターネット上で未発表論文だが、Shapiro という人が numerical range についてまとめていた。この numerical range については、2×2 行列については楕円になることが証明されておりその結果が 2×2 行列でさえそれほど自明でないことがわかった。そこでまた、Shapiro 先生に Karaev の証明は複雑すぎませんかとメールで聞いてみると、同感であるという答えを得た。その後、ぼくは Haagerup Haarp の numerical radius の論文に出会い、かれらの証明法を用いて、$W(T)$ が円になるための十分条件を見つけたが、これをもっとゆるい条件にしたいと僕の学生青野君と議論を重ねた。青野君は僕のもとで暗号理論の卒業研究を書いていたが、数学ができるので僕の研究に付き合わしていた。ところが最近、青野君が次の反例をもってきたことにより新たな展開を迎えることになった。3×3 行列

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は、$T^3 = 0$ で nil-potent だが、$W(T)$ は円の左側を切り取られた図形で、正しい円にならないことが証明できる。

これについて早速、Karaev 先生に問い合わせてみた。Karaev 先生はやはり誰かにこれと同じ例を知らされ、そのことを連絡するため僕にメールをくれたそうだが、ぼくはそれに気づかずにいた。

円になるための十分条件についてはむしろ反例がでたことで、意味を持つと考えられる。ぼくは、しばらくこの十分条件をはずすことばかり考えていたから。

そこで、ぼくが与えた十分条件と関連する Haagerup らの結果をここに書いておこう。

Haargerup and de la Harpe[2] は nilpotent operator $T(T^n = 0)$ にたいして、$w(T) \le \cos\dfrac{\pi}{n+1}\|T\|$、$n \ge 1$ が成り立つことを示し、次の定理を与えた。

定理 *A*.[[2] p.375] Suppose $\|T\| = 1$ and that there exists a unit vector $\zeta \in H_1$ with $|\langle T\zeta|\zeta\rangle| = \cos\dfrac{\pi}{n+1}$. Let V_ζ be the linear span of $(\zeta, T\zeta, T^2\zeta, \cdots, T^{n-1}\zeta)$. Then V_ζ is an n-dimensional subspace of H which is reducing for T, and the restriction of T to V_ζ is unitarily equivalent to the n-dimensional shift on $\mathbb{C}^n$.

いま、S を $\mathbb{C}^n$ 上の shift で、行列

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としさらに

$$\zeta_0 = \left(\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{k\pi}{n+1}\right)_{1\le k\le n} \in C^n$$

とおく。これらの記号を用いて Haagerup たちはまた次の結果を証明した。

定理 *B*.[[2] p.374] Let $\beta_{i,j} = \langle T^{i-1}\zeta|T^{j-1}\zeta\rangle$, $i,j \ge 1$. And let $alpha_{i,j} = \langle S^{i-1}\zeta_0|S^{j-1}\zeta_0\rangle$, $i,j \ge 1$. If $\beta 1, 2 = \alpha_{1,2}$, then we have $\beta = \alpha$.

この Theorem A と Theorem B を使って僕が証明したのは次の定理 1 である。

定理 1. Let T be a bounded linear operator of norm 1 such that $T^n = 0$ for some $n \ge 1$. Assume its numerical radius $w(T) = \cos\dfrac{\pi}{n+1}$. Then numerical range $W(T)$ is precisely the disc with radius $W(T)$ centered at origin.

その後、numerical range についての Halmos の論文 [1] を読んでいるうち、$W(S)$ が円になることはもっと簡単に示せ、$w(S)=\cos\dfrac{\pi}{n+1}$ との関係が明確になることがわかる以下の証明を見つけた。いま、ユニタリな行列

$$U=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える。U の固有方程式は $z^n-1=0$ であり、U の固有値は 1 の n 乗根 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$ であり、それぞれ対応する固有ベクトルは互いに直交する。$W(U)$ は含むが、固有ベクトルは互いに直交とするので、結局 $W(U)$ は原点を中心としてを端点とする正 n 多面体なる。いま、多面体の中心から各辺に下ろした垂線の長さは $\dfrac{|1+\omega|}{2}=\cos\dfrac{\pi}{n}$ となり、Haagerup らの定理と関連していることがわかる。上のユニタリ行列を少し変えて

$$U_\theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta}\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、これもユニタリで、$Z_0=e^{i\frac{\theta}{n}}$ として U_0 の固有値は $Z_0,\omega Z_0,\omega^2 Z_0,\cdots,\omega^{n-1}Z_0$ となり、これらに属する固有ベクトルは互いに直交し、$W(U_\theta$ は、原点を中心とした固有値を端点とする正 n 多面体となる。ここで注意してほしいのは $W(U_\theta)$ は、$W(U)$ を正の方向に（角度 $\dfrac{\theta}{n}$）回転したものになるということである。

定理 2：$W(S)$ は原点を中心とする半径 $\cos\dfrac{\pi}{n+1}$ の円である。

証明：

いま、$(n+1)\times(n+1)$ のユニタリ行列

$$U_\alpha=\left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & \alpha\\ & & & 0\\ & S & & \vdots\\ & & & 0 \end{array}\right], |\alpha|=1$$

を考える。U_α は、S の拡大 (dilation) であるから、

$$W(S)\subset W(U_\alpha)$$

は明らかだが α を条件 $|\alpha|=1$ で変化させても包含関係は成り立つ。言い換えれば上に述べたことから、$W(U_\alpha)$ は $W(U_1)$ を回転したものであるから、$\bigcap_{|\alpha|=1} W(U_\alpha)$ は原点を中心とする円で、おのおの $W(U_\alpha)$ は正 $n+1$ 面体である。その共通部分は結局、$W(U_\alpha)$ に内接する円であることがわかる。中心から各辺におろした足の長さが $\cos\dfrac{\pi}{n+1}$ であるから、内接円の半径が $\cos\dfrac{\pi}{n+1}$ であることがわかる。ここで、上の包含関係が等式であることさえ証明すれば、定理が成立することがわかる。それには、

$$\bigcap_{|\alpha|=1} W(U_\alpha)\subset W(S)$$

を示す。

$$U_0=\frac{1}{2}(U_{-1}+U_1)$$

とすると

$$W(U_0)=W(S)$$

がわかるが、

$$\bigcap_{|\alpha|=1} W(U_\alpha)\subset W(U_0)$$

は numerical range が凸集合となることを考えればわかる。（証明終わり）

参考文献

[1] R.P.Halmos, A Glimpse into Hilbert Space, Lectures on Modern Mathematics, vol.1,T.Saaty(ed),1-22,J.Wiley&Sons inc,1963(Selecta Expository Writing,67-88)

[2] Uffe Haagerup and Pierre de la Harpe, The Numericaal Radius of a Nilpotent Operator on a Hilbert Space, Proceedings of Amer.Math.Soc. 115,2

[3] Mubariz T. Karaev, The Numerical Range of a Nilpotent Operator on a Holbert Space, Proc. Amer.Math.Soc. ,2004

（※ TEX データ作成：平野立樹）